Probabilités et variables aléatoires : rappels de première année

1. Probabilités

1.1. Vocabulaire utile

- Une **expérience aléatoire** (exemple : lancer d'un dé à six faces) est une expérience qui peut produire plusieurs résultats (qu'on qualifiera d'"aléatoires" , c'est-à-dire d'imprévisibles), appelées **issues** (ici : 1,2,3,4,5,6). L'ensemble des issues est appelé **univers**, et noté traditionnellement Ω (ici $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$).
- Un **événement** est usuellement désigné par une lettre majuscule et :
  - il est formulé par une phrase ou propriété vérifiée par le résultat de l'expérience (exple : A : "obtenir un chiffre pair")
  - formellement il s'agit en fait d'une sous-partie de l'univers (ici : $A = \{2,4,6\}$)
- Sur cet univers, on définit des **probabilités**. Il faut voir une probabilité P comme une mesure : chaque issue possède une probabilité (positive) ; la somme de toutes ces probabilités donne la mesure de l'univers, qui vaut par convention 1. Ainsi dans notre exemple, on dispose des probabilités $\mathrm{P}(\{1\})$ que l'on notera p_1 pour aller plus vite, $\dots, \mathrm{P}(\{6\}) = p_6$ associées à chaque issue de l'univers, où les p_i sont :
  - sont des réels inclus dans $[0,1]$
  - vérifient $p_1 + \cdots + p_6 = 1$

1.2. Calcul de probas : cas d'équiprobabilité

On aurait très envie de dire que $p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$ mais il n'y a aucune raison que ce soit le cas, le dé est peut-être truqué !
On doit alors être très attentif à ce qui est dit dans l'énoncé et vérifier si on est ou non en situation d'**équiprobabilité**. Dans notre exemple, on aurait par exemple mentionné que le dé est non pipé, ou parfaitement équilibré.
Si on a pu repérer dans l'énoncé un tel renseignement :

⚠
- on mentionne cette situation d'équiprobabilité en citant le passage de l'énoncé qui le prouve
- on peut calculer les probabilités en comptabilisant le nombre de situations favorables à ce que notre événement A soit réalisé et le nombre de situations possibles : on peut alors utiliser la formule ♡ :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

1.3. Calcul de proba : cas général

La donnée des p_i définit une probabilité. Mais cette donnée ne permet d'obtenir que les probabilités des différentes issues. Or dans la pratique, on nous demande de calculer des probabilités sur des événements. Une probabilité est une fonction qui, à chaque événement A de l'univers associe sa probabilité P(A) ; et qui vérifie, en vrac :

- Pour tout événement A, $\mathrm{P}(A) \in [0,1]$ une proba est *toujours* un nombre compris entre 0 et 1
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1 \qquad \mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- **SI LES A_i SONT DEUX À DEUX DISJOINTS**, $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i)$
- $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- Si $A \subset B$, $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$ (croissance de la probabilité)
- $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$ (et donc $\mathrm{P}(A\cup B) \leq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$)
- **SI LES A et B SONT INCOMPATIBLES**, $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

✎ **Exercice 1**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules indiscernables au toucher parmi lesquelles on compte une seule boule verte, le reste étant constitué de boules rouges. On effectue n **tirages successifs sans remise**. On note V_i (respectivement R_i) l'événement "on tire la boule verte (respectivement rouge) au i^{eme} tirage", avec $i \in [\![1,n]\!]$.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On considère l'événement "la boule verte a été tirée à l'issue des k premiers tirages".
Donner une définition ensembliste de A puis calculer sa probabilité.

A est réalisé si et seulement si la boule verte est apparue au premier tirage et que les autres ont été toutes rouges *ou bien* qu'elle est apparue au deuxième tirage et que tous les autres tirages ont été rouges, ... *ou bien* qu'elle est apparue au k^{eme} tirage et que les autres tirages ont tous été rouges.
Donc $A = (V_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k) \cup (R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_k) \cup \cdots \cup (R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap V_k)$ d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}\big((V_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k) \cup (R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_k) \cup \cdots \cup (R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap V_k)\big) \\
&= \mathrm{P}(V_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k) + \mathrm{P}(R_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap R_k) + \cdots + \mathrm{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap V_k) && \text{par incompatibilité de l'union} \\
&= \mathrm{P}(V_1)\mathrm{P}(R_2)\ldots\mathrm{P}(R_k) + \mathrm{P}(R_1)\mathrm{P}(V_2)\mathrm{P}(R_3)\ldots\mathrm{P}(R_k) + \cdots + \mathrm{P}(R_1)\ldots\mathrm{P}(R_{k-1})\mathrm{P}(V_k) && \text{ces tirages successifs étant sans remise} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^k && \text{chaque pioche de boule étant équiprobable} \\
&= \frac{k}{n^k}
\end{aligned}$$

✎ **Exercice 2** (solution)

Un piéton emprunte un chemin sur lequel il va rencontrer trois feux réglés de manière indépendantes pour traverser la route. La probabilité que chaque feu soit rouge est de $p \in]0,1[$. Soit A l'événement "le piéton rencontre au moins deux feux rouges lors du trajet".

1. Donner les événements élémentaires qui permettront de décrire l'événement A de manière ensembliste
2. Montrer que $\mathrm{P}(A) = p^2(3-2p)$.

1.4. Les probabilités conditionnelles

♡ Si A et B sont deux événements, avec $\mathrm{P}(B) \neq 0$, on définit la probabilité de A sachant B par

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

On voit donc que «A sachant B» n'est pas un événement. La probabilité conditionnelle P_B est en fait une *autre* mesure de probabilité, qui à tout événement A associe sa probabilité « dans un monde où on sait déjà que B est réalisé » Ce serait un monde où l'ensemble des issues qui sont dans B formerait notre nouvel univers.

1.4.1. Indépendance de deux événements

Lorsque la réalisation de B n'a aucune influence sur le fait que A soit réalisé, on dit que les événements A et B sont **indépendants**,
♡ ce qui se traduit par (si B est de proba non nulle) :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$$

Remarque : l'équivalence A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$ est toujours vraie ! (même lorsque $\mathrm{P}(B) = 0$)

1.4.2. Système complet d'événements

On dit qu'une famille (finie ou dénombrable) d'événements est un système complet d'événements si :

- ▶ Les événements sont deux à deux incompatibles (càd deux événements quelconques ont toujours une intersection vide)
- ▶ La réunion (disjointe) des événements vaut l'univers tout entier Ω

1.4.3. Formule des probabilités totales

♡ Soit B un événement et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors la formule des probabilités totales assure que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(B) &= \sum_{i \in I} \mathrm{P}(B \cap A_i) \\
&= \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}_{A_i}(B) && \text{si de plus tous les } A_i \text{ sont de probabilité non nulle}
\end{aligned}$$

✎ **Exercice 3**

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges.
On choisit au hasard une urne, puis on tire deux boules dans cette urne successivement, et avec remise.
On note A_k : "le tirage s'effectue dans l'urne k" (pour $k \in [\![1,n]\!]$) et on note B : "on tire deux boules blanches".

1. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $\mathrm{P}_{A_k}(B)$ en justifiant.
2. Comment appelle-t-on la famille $(A_1,\ldots,A_n)$?
3. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

1. Pour chacun des deux tirages, on est en situation d'équiprobabilité puisque les tirages se font "au hasard".
A_k étant réalisé, les tirages se font dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Pour chacun des deux tirages, il y a donc k cas favorables parmi n cas possibles.
Puisque les deux tirages sont indépendants (tirages successifs avec remise), on peut multiplier les probabilités de chaque tirage, et on en déduit :
$$P_{A_k}(B) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}$$
2. La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complets d'événements.
3. On en déduit, grâce à la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ que :
$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

✎ **Exercice 4** (solution)

Reprendre l'exercice ci-dessus dans le cas d'un tirage sans remise.

1.5. formule des probabilités composées

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathrm{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathrm{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

✎ **Exercice 5**

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'un paquet de n cartes à jouer qui ne comprend que des cartes rouges sauf une carte noire. On découvre l'une après l'autre les première cartes du paquet. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Quelle est la probabilité de l'événement B : "la carte rouge est tirée au k^{eme} tirage" ?

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en notant R_i l'événement "la i^{eme} carte retournée est rouge", on a $B = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$
Alors d'après la formule des probabilités composées :
$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(R_1)\mathrm{P}_{R_1}(R_2)\mathrm{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \ldots \mathrm{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right)$$
Mais chaque fois que l'on retourne une carte, on est en situation d'équiprobabilité. Au départ, on a n cartes possibles, puis $n-1$, etc. Le nombre de cartes rouges est de $n-1$, puis $n-2$, etc.
Pour le dernier tirage, il ne reste que plus que $n-(k-1)$ cartes possibles et on veut piocher l'unique carte noire. On a donc :
$$\mathrm{P}(B) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$
Remarque : la formule est valable même si $k = 1$ car on a bien une chance sur n de tomber sur la carte rouge au premier tirage.

1.6. Méthodologie générale pour des calculs de probabilités

♡ On peut se référer à ce document et on l'appliquera à l'exercice suivant :

✎ **Exercice 6**

On lance 4 fois une pièce de monnaie, qui tombe sur Face avec une probabilité $p \in]0, 1[$
1. Introduire les événements élémentaires associés à cette expérience.
2. Calculer les probabilités des événements suivants à l'aide des événements élémentaires :
   - **a.** A : "on ne tombe jamais sur Pile"
   - **b.** B : "on ne tombe jamais sur Face"
   - **c.** C : "Face n'est jamais suivi de Pile"
   - **d.** D : "Pile n'est jamais suivi de Face"
   - **e.** E : "on a obtenu 2 Faces consécutifs mais pas 3 Faces consécutifs"
   - **f.** F : "on a obtenu 3 Face consécutifs mais pas 4 faces consécutifs"
   - **g.** G : "on a obtenu la séquence Pile-Face-Pile"
   - **h.** H : "on a obtenu la séquence Pile-Face-Pile mais pas la séq. Face-Pile-Face"

1. Pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on note : F_k :"la pièce tombe sur Face lors du k^e lancer"
P_k :"la pièce tombe sur Pile lors du k^e lancer"

2. **a.** $A = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$ et
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \\ &= \mathrm{P}(F_1) \times \mathrm{P}(F_2) \times \mathrm{P}(F_3) \times \mathrm{P}(F_4) \quad \text{par indépendance des lancers} \\ &= p^4 \end{aligned}$$

c. On fait une disjonction de cas selon le rang du premier face obtenu :

$$\begin{aligned} C \text{ est réalisé} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{si on tombe sur Face, alors on tombe toujours sur Face ensuite} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} & F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4 \text{ est réalisé} \\ \text{ou} & P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \text{ est réalisé} \end{array} \end{aligned}$$

Donc C est la réunion disjointe suivante :
$C = (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)$
Par incompatibilité, on a :
$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + \mathrm{P}(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + \mathrm{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) + \mathrm{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) + \mathrm{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)$
Enfin, par indépendance des lancers :
$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(F_1)\mathrm{P}(F_2)\mathrm{P}(F_3)\mathrm{P}(F_4) + \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(F_2)\mathrm{P}(F_3)\mathrm{P}(F_4) + \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2)\mathrm{P}(F_3)\mathrm{P}(F_4) + \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2)\mathrm{P}(P_3)\mathrm{P}(F_4) + \mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2)\mathrm{P}(P_3)\mathrm{P}(P_4)$
$\mathrm{P}(C) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} p^{4-k}(1-p)^k$

• Si $p = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{4-k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{2^4}$ • Si $p \neq \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C) = p^4 \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \underset{\text{somme géom de raison } \neq 1}{=} \dots \underset{\text{réduction de la fraction}}{=} \dots = \frac{p^5-(1-p)^5}{2p-1}$

2. Variables aléatoires

2.1. Généralités

Une **variable aléatoire réelle** X ou plus simplement **variable aléatoire** (parfois abréviée v.a.r.) est un nombre associé à une issue d'une expérience aléatoire.

Techniquement, elle est donc définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$: à l'issue ω de Ω, on associe le nombre $X(\omega)$.
Dans le cas de notre lancer de dé, on peut par exemple définir la variable aléatoire X attribuant un score à chaque lancer de dé : 1 point si on a fait 5 ou 6, et 0 point si on a fait 3 ou moins. Ainsi, on a par exemple $X(\{2\}) = 0$ et $X(\{5\}) = 1$.

L'ensemble des valeurs prises par X se note $X(\Omega)$ et est appelé **univers-image** de X. (ici $X(\Omega) = \{0,1\}$)
Pour tout nombre k dans l'univers image, on peut considérer, l'événement regroupant toutes les issues ω de Ω telles que $X(\omega) = k$. On note cet **événement $(X = k)$**. (Dans notre exemple, on a $(X = 1) = \{5,6\}$)

Si on considère l'ensemble des événements $(X = k)$ pour tous les k de l'univers image, on obtient des événements disjoints et recouvrant ⚠ tout l'univers. Une variable aléatoire est donc un formidable outil pour créer des systèmes complets d'événements !

Dans notre exemple, $\{(X=0),(X=1)\}$ est un SCE puisqu'il n'y a aucun tirage qui donne à la fois 0 points et 1 points et on est sûr d'avoir regroupé toutes les issues possibles si on a regroupé toutes les issues aboutissant à un score de 0 ou de 1.

N.B. : Dans les exercices, on peut être amenés à travailler avec d'autres événements du type $(X < 2)$, $(X \geq 5)$, $(2 \leq X \leq 5)$, $(X^2 \leq 4)$, $(X + 2 \leq 6)$, etc. Il suffira de les exprimer en tant qu'événements élémentaires

✎ **Exercice 7** (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a.r prenant ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$. Exprimer les événements suivants grâce aux'"événements élémentaires".

- ▶ Dans cette question, on considère que $n = 10$
  - 1er exple : $(X \leq 3) = [(X=0) \cup (X=1) \cup (X=2) \cup (X=3)]$ car X prend des valeurs entières (on peut aussi écrire $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{3}(X=k)$)
  - $(5 \leq X \leq 8) =$ • $(3 < X < 7) =$ • $(X > 8) =$
  - $\left(\sqrt{X} < 2\right) =$ • $(\star)$ $\left(X^2 > 60\right) =$ • $(\star)$ $\left(e^X \leq 2\right) =$
- ▶ Dans cette question, on considère n quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et on pensera au raisonnement par disjonction de cas :
  - Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(X > k) =$ • $(\star)$ X est pair • $(\star)$ $\left(X < \frac{n}{2}\right) =$

2.1.1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On voit que pour faire des calculs se rapportant à X il n'est pas forcément nécessaire d'aller fouiller dans les issues ω ; il suffit de manipuler les événements $(X=k)$ et leurs probabilités. Ainsi :

- $\forall k \in X(\Omega), \quad \mathrm{P}(X=k) \in [0,1]$
- $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X=k) = 1$

La donnée de l'univers image $X(\Omega)$ et des probabilités $\mathrm{P}(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$ constitue **la loi de probabilité** de la v.a.r. X.

⚠ **Attention** : la loi de probabilité de X permet d'obtenir beaucoup d'informations sur X, mais elle ne définit pas à elle seule la variable : deux variables aléatoires suivant la même loi ne sont pas forcément égales. Considérons en effet un tirage à Pile ou Face équilibré ; on note X la v.a. qui vaut 1 si on obtient Pile et 0 si on obtient Face ; et Y la v.a. qui vaut 0 si on obtient Pile et 1 si on obtient Face.

On voit alors que X et Y suivant la même loi :

k	0	1
$\mathrm{P}(X=k)$	1/2	1/2

et

k	0	1
$\mathrm{P}(Y=k)$	1/2	1/2

mais on n'a clairement pas $X=Y$...

✎ **Exercice 8 (élémentaire)** (solution)

Par exemple, si on considère une urne contenant 2 boules portant le numéro 1, 3 boules portant le numéro 2 et 5 boules portant le numéro 3, qu'on tire une boule au hasard dans cette urne et qu'on appelle X le numéro de la boule tirée, donner la loi de proba de X.

✎ **Exercice 9 (Calculs de probabilités d'événements relatifs à une v.a.r X)** (suite du corrigé)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![-n,n]\!]$ et $\forall k \in [\![-n,n]\!]$, $\mathrm{P}(X=k) = \frac{1}{2n+1}$

1. Vérifier que les données de l'énoncé permettent bien de définir une variable aléatoire.
2. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $\mathrm{P}(X \geq 0)$
   - $\mathrm{P}\big(X^2 = k^2\big)$ avec $k \in [\![1,n]\!]$
   - $\mathrm{P}(X > k)$ avec $k \in [\![1,n]\!]$,
   - $\mathrm{P}\big(e^X > 1\big)$
3. Donner la loi de X^2.

2. Puisque $(X \geq 0) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)$, la réunion étant incompatible on a $\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$

✎ **Exercice 10 La loi géométrique tronquée, inspiré d'EDHEC** (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce de monnaie, qui tombe sur Face avec une probabilité $p \in]0,1[$. On définit Z la variable aléatoire égale au rang du premier Face obtenu, ou à 0 si on obtient jamais de Face.

1. Introduire les événements élémentaires associés à cette expérience.
2. Calculer $\mathrm{P}\big([Z=0]\big)$
3. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Écrire l'évenement $(Z=k)$ à l'aide de certains événements élémentaires puis déterminer la probabilité $\mathrm{P}\big([Z=k]\big)$.
4. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Z=k) = 1$

2.1.2. Les calculs que l'on peut faire avec une v.a.r : l'espérance et la variance

On définit ensuite (sous réserve de convergence absolue des séries en jeu si $X(\Omega)$ est infini) :

♡
- L'espérance $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k\mathrm{P}(X=k)$ (s'interprète comme moyenne observée sur un grand nombre d'expériences)
- La variance $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big)^2\Big)$ (Formule de définition uniquement utile pour les problèmes abstraits)

♡ Dans la pratique, on calcule la variance avec la **formule de Koenig-Huygens** : $V(X) = \mathrm{E}\big(X^2\big) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$

On se souviendra que la variance est une quantité **positive** ! (cela évitera d'écrire des bêtises dans les copies)

♡ On rappelle aussi le très utile **théorème du transfert** : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\mathrm{P}(X=k)$

✎ **Exercice 11** (solution)

Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire de l'ex 8

2.1.3. Deux propriétés utiles

♡ • La linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X)+b$ • propriété sans nom : $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$

2.2. Les lois de référence à connaître sur le bout des doigts

2.2.1. Les différentes lois et leurs caractéristiques

X suit la loi...	notation	$X(\Omega)$	probabilité $P(X=k)$	espérance	variance	Python
Certaine égale à a	néant	$\{a\}$	$P(X=a)=1$	a	0	
uniforme sur $[\![1,n]\!]$	$\mathscr{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	`rd.randint(1,n+1)`
de Bernoulli de paramètre p	$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	
binomiale de paramètres n et p	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	`rd.binomial(n,p)`
de Poisson de paramètre λ	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	`rd.poisson(lambda)`
Géométrique de paramètre p	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	`rd.geometric(p)`

2.2.2. Les situations-type à savoir reconnaître

X suit la......... lorsque :

Loi certaine égale à a : X ne peut prendre qu'une valeur possible $(X(\Omega)=\{a\})$ OU $V(X)=0$.

♡ **Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$:** les différentes valeurs entières entre 1 et n sont équiprobables.
situation la plus courante : on tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro de la boule tirée.

♡ **Loi de Bernoulli de paramètre p :** son univers-image est $\{0,1\}$
Souvent, on associe à une expérience aléatoire ayant deux issues la valeur 1 lors de la réalisation du "succès", et la valeur 0 lors de la réalisation de l'échec. Cette expérience est alors appelée épreuve de Bernoulli.

♡ **Loi binomiale de paramères n et p :** en interprétant comme succès "...blablabla..."(dont la probabilité est égale à p), cette expérience correspond à une répétition de $\boldsymbol{n}$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X compte le nombre de succès dans cette expérience.

♡ **Loi géométrique de paramètre p :** en interprétant comme succès "...blablabla..."(dont la probabilité est égale à p), cette expérience correspond à une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et X correspond au rang du premier succès.

Loi de Poisson de paramètre λ : l'énoncé dira clairement si on est dans cette situation

✎ **Exercice 12**

Dans une urne, on place un jeton numéroté 1. On rajoute un certain nombre de jetons numérotés 0, ce nombre étant déterminé aléatoirement suivant une loi de Poisson de paramètre 2. On tire alors au hasard un jeton de cette urne. On note N le nombre de jetons 0 dans l'urne, et X le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer $X(\Omega)$. Qu'en déduisez-vous quant au type de loi de X ?
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, déterminer $P_{(N=n)}(X=1)$.
3. En déduire $P(X=1)$, puis en déduire la loi de X.

1. $X(\Omega)=\{0,1\}$. X suit donc un loi de Bernoulli.
2. Le tirage d'une boule dans une urne relevant d'une situation d'équiprobabilité, il suffit de comptabiliser le nombre de boules numérotées 1 et de boules au total. On en déduit $P_{(N=n)}(X=1)=\frac{1}{n+1}$
3. D'après la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{(N=n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=1)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2}\frac{2^n}{n!}\frac{1}{n+1}\\
&= \frac{e^{-2}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n'=n+1}{=} \frac{e^{-2}}{2}\sum_{n'=2}^{+\infty}\frac{2^{n'}}{n'!} = \frac{e^{-2}}{2}\left(e^2-1-2\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{e^2}
\end{aligned}$$

Donc $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{e^2}\right)$

3. Corrections

✧ Corrigé de l'exercice 2 (retour)

1. $\forall i \in [\![1,3]\!]$, on note R_i l'événement "le feu numéro i est rouge".
2. A est réalisé si et seulement si le piéton a tous les feux rouges, ou s'il rencontre un seul feu vert lors du trajet.
   On a alors :
$$A = (R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3})$$
   Donc
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}\Big((R_1 \cap R_2 \cap R_3) \cup (\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3) \cup (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3})\Big) \\
&= \mathrm{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathrm{P}(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3) + \mathrm{P}(R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3) + \mathrm{P}(R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}) && \text{par incompatibilité de la réunion} \\
&= \mathrm{P}(R_1)\mathrm{P}(R_2)\mathrm{P}(R_3) + \mathrm{P}(\overline{R_1})\mathrm{P}(R_2)\mathrm{P}(R_3) + \mathrm{P}(R_1)\mathrm{P}(\overline{R_2})\mathrm{P}(R_3) + \mathrm{P}(R_1)\mathrm{P}(R_2)\mathrm{P}(\overline{R_3}) && \text{par indépendance des feux} \\
&= p^3 + (1-p)p^2 + p(1-p)p + p^2(1-p) \\
&= p^3 + 3p^2(1-p) = p^2\big(p + 3(1-p)\big) \\
&= p^2(3-2p)
\end{aligned}$$

✧ Corrigé de l'exercice 4 (retour)

1. Pour chacun des deux tirages, on est en situation d'équiprobabilité puisque les tirages se font "au hasard".
   A_k étant réalisé, les tirages se font dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
   Puisque les deux tirages sont avec remise, on peut utiliser la formule des probabilités composées
   Pour le premier tirage, il y a donc k cas favorables parmi n cas possibles. Pour le second tirage, il y a donc $k-1$ cas favorables parmi $n-1$ cas possibles.
$$P_{A_k}(B) = \frac{k}{n} \times \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$
2. La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complets d'événements.
3. On en déduit, grâce à la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ que :
$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)} \times \frac{n(n+1)\big((2n+1)-3\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n-2)}{6n(n-1)} = \frac{n+1}{3n}
\end{aligned}$$

✧ Corrigé de l'exercice 7 (retour)

▶
- $(5 \le X \le 8) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} \big[(X=5) \cup (X=6) \cup (X=7) \cup (X=8)\big] = \bigcup_{i=5}^{8} (X=i)$
- $(3 < X < 7) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} (4 \le X \le 6) = \big[(X=4) \cup (X=5) \cup (X=6)\big]$
- $(X > 8) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} (X \ge 9) = \big[(X=9) \cup (X=10)\big]$
- $\big(\sqrt{X} < 2\big) = \big(X < 4\big) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} (X \le 3) = \big[(X=0) \cup (X=1) \cup (X=2) \cup (X=3)\big]$
- $\big(X^2 > 60\big) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs postives}}}{=} \big(X > \sqrt{60}\big) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} (X \ge 8) = \big[(X=8) \cup (X=9) \cup (X=10)\big]$
  (on rappelle que $7 < \sqrt{60} < 8$ puisque $49 < 60 < 64$ et par croissance de la fonction racine carrée)

- $\left(e^X \leq 2\right) = (X \leq \ln 2) \underset{\substack{X \text{ est à} \\ \text{valeurs entières}}}{=} (X=0)$

  (on rappelle que $0 < \ln 2 < 1$ puisque $1 < 2 < e \simeq 2,7$ et par croissance de la fonction logarithme népérien)

▶ Dans cette question, on considère n quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et on pensera au raisonnement par disjonction de cas :

- $(X > k) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } k \geq n \\ \displaystyle\bigcup_{i=k+1}^{n} (X=i) & \text{si } k < n \end{cases}$

- l'événement "X est pair" est réalisé si et seulement si $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (X=2k)$ est réalisé

- $\left(X < \frac{n}{2}\right) = \begin{cases} \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} (X=i) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (X=i) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

✧ Corrigé de l'exercice 8 (retour)

$X(\Omega) = \{1,2,3\}$ (ou $[\![1,3]\!]$)

Les boules étant tirées au hasard, on est en situation d'équiprobabilité et $\mathrm{P}(X=1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(X=2) = \frac{3}{10}$ et $\mathrm{P}(X=3) = \frac{5}{10}$

La variable aléatoire étant finie, elle admet une espérance et $\mathrm{E}(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{5}{10} = \frac{2+6+15}{10} = \frac{23}{10}$

La variable aléatoire étant finie, elle admet un moment d'ordre 2 et $\mathrm{E}\left(X^2\right) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{5}{10} = \frac{2+12+45}{10} = \frac{59}{10}$

D'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \frac{59}{10} - \frac{529}{100} = \frac{590-529}{100} = \frac{61}{100}$

✧ Corrigé de l'exercice 9 (retour)

1. ▶ $\forall k \in [\![-n,n]\!]$, $\mathrm{P}(X=k) \geq 0$

▶ $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+1} = 1$

Donc l'énoncé défini bien un variable aléatoire discrète.

2.
- Puisque $(X \geq 0) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} (X=k)$, car X est à valeurs entières.

  De plus, la réunion étant formée d'événements incompatibles on a :

$$\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} (X=k)\right) \underset{\text{inc.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

- Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $(X^2 = k^2) = \left[(X=k) \cup (X=-k)\right]$ et cette réunion étant formée d'événements incompatibles, on a :

$$\mathrm{P}\left(X^2 = k^2\right) \underset{\text{inc.}}{=} \mathrm{P}(X=k) + \mathrm{P}(X=-k) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}$$

- Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $(X > k) = \displaystyle\bigcup_{i=k+1}^{n} (X=i)$ car X est à valeurs entières. Cette réunion étant formée d'événements incompatibles, on a :

$$\mathrm{P}(X > k) \underset{\text{inc.}}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{P}(X=i) = \sum_{i=k+1}^{n} = \frac{1}{2n+1} = \frac{n-k}{2n+1}$$

- $\left(e^X > 1\right) = (X > 0) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} (X=k)$ car X est à valeurs entières.

  De plus, cette réunion étant formée d'événements incompatibles, on a :

$$\mathrm{P}\left(e^X > 1\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (X=k)\right) \underset{\text{inc.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

3. En premier, on détermine l'univers-image de Y : Puisque $X(\Omega) = [\![-n,n]\!]$, on en déduit que $Y(\Omega) = \left\{k^2, k \in [\![0,n]\!]\right\}$: les valeurs que prend Y sont tous les carrés parfaits entre 0 et n^2.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $k^2 \in Y(\Omega)$ et $\mathrm{P}\left(Y = k^2\right) = \mathrm{P}\left(X^2 = k^2\right) = \frac{2}{2n+1}$ d'après la question précédente.

De plus, $\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}\left(X^2 = 0\right) = \mathrm{P}(X=0) = \frac{1}{2n+1}$

Ce qui suffit à décrire la loi de Y.

✧ **Corrigé de l'exercice 10** (retour)

1. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on appelle F_i l'événement "la pièce est tombée sur face au lancer n°i"

2.

$$\begin{aligned}
[Z=0] \text{ est réalisé} &\Leftrightarrow \text{on n'obtient jamais face}\\
&\Leftrightarrow \text{on est tombé sur pile à chaque des } n \text{ lancers}\\
&\Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \overline{F_k} \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Z=0] &= \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_n} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_k}\\
\mathrm{P}(Z=0) &= \mathrm{P}\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_n}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{F_k}\right) && \text{par indépendance des lancers}\\
&= \prod_{k=1}^{n} (1-p)\\
&= (1-p)^n
\end{aligned}$$

3. $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
[Z=k] \text{ est réalisé} &\Leftrightarrow \text{le premier face est obtenu au lancer n°}k\\
&\Leftrightarrow \text{on obtient Face au lancer } k \text{ et pile aux précédents}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Z=k] &= \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k\\
\mathrm{P}(Z=k) &= \mathrm{P}\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k\right)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}\left(\overline{F_i}\right)\right) \mathrm{P}(F_k) && \text{par indépendance des lancers}\\
&= p \prod_{i=1}^{k-1} (1-p)\\
&= p(1-p)^{k-1}
\end{aligned}$$

4. On vérifie avec les formules de somme géométrique du cours de première année.
Attention, la formule donnant $\mathrm{P}(Z=k)$ n'étant pas la même pour $k=0$ et pour $k>0$, on doit impérativement penser à séparer la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(Z=k) &= P(Z=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z=k)\\
&= (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}\\
&= (1-p)^n + p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)}\\
&= (1-p)^n + p \times \frac{1-(1-p)^n}{p}\\
&= 1
\end{aligned}$$

comme attendu.