Cahier de vacances de ECG1 à ECG2 en maths appli

Dans chacune des 26 sessions de travail, il y aura :

- Quelques **calculs** pour s'échauffer.
- Des auto-**vérifications** de cours. *(Je conseille d'acheter un carnet ou un petit cahier pour noter tous les résultats du cours de première année qui ne sont pas encore sus afin de les avoir facilement sous les yeux pour pouvoir les réviser.)*
- Une **relecture attentive de certains exos-méthodes** du cours de M. Brossard.
- Un **exercice d'application** à faire en suivant le modèle de l'exo-méthode.
- Parfois un **exercice facultatif** pour conforter les bases *(à faire avant l'exercice d'application si ce dernier semble trop difficile)* et/ou au contraire aller un peu plus loin sur cette thématique *(à faire après l'exercice d'application)*.
- Un **corrigé** dans un fichier dédié *(A l'occasion de la lecture des corrigés, on pourra aussi compléter le carnet avec des conseils de rédaction sur des réflexes que l'on a pas encore)*
- A tout moment, si ce qui est proposé ici semble trop compliqué ou s'il y a toute autre question, **CONTACTEZ MOI** pour être dirigé vers des exercices plus faciles sur toute thématique qui pose problème.

Session 1

Calculs : Fractions

Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible. On pensera bien à

- décomposer et simplifier au maximum avant d'effectuer les multiplications
- choisir le meilleur dénominateur commun, c-à-d le plus + possible. *(Exemple : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ a pour meilleur dénominateur commun 12 et non 24)*

En profiter pour relire la méthode 1.1 du chapitre 1 du cours de M. Brossard et son exemple d'application.

$A = \dfrac{3+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{5}}$ $\quad B = \frac{15}{22} \times \frac{46}{35} \times \frac{77}{69}$ $\quad C = \frac{11}{15} + \frac{7}{6} - \frac{13}{10}$ $\quad D = 1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}$ $\quad E = \dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{10}}$

Savoir-faire : Dériver une fonction pour trouver son sens de variation

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Remplir le tableau des dérivées :

fonction $x \mapsto \dots$	x^α	$\dfrac{1}{x^\alpha}$	$\dfrac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln x$
dérivée $x \mapsto \dots$						
fonction	u^α	$\dfrac{1}{u^\alpha}$	$\dfrac{1}{u}$	$\sqrt{u}$	e^u	$\ln u$
dérivée						

- $(u+v)' = \dots\dots\dots\dots$
- $(uv)' = \dots\dots\dots\dots$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dots\dots\dots\dots$
- $(u \circ v)' = \dots\dots\dots\dots$
- éq° de la tangente à la courbe de f en a : $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. Vérifier ses résultats en comparant avec le tableau du §1 du chapitre 2 du cours de M. Brossard et noter dans son carnet les formules non encore sues.
3. Relire la méthode 1.1 et la méthode 1.2, puis l'exemple 1 d'application du chapitre 2 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

En suivant la rédaction des exos-méthodes ci-dessus, déterminer les variations des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}_+^*$:

1. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x\ln x+1}{x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 - x^2 \ln x$
3. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{x}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

On pourra s'entraîner sur cette fiche d'exercices à trous (en commençant par rajouter une ligne qui justifie la dérivabilité et en gardant les calculs de limites pour la session suivante)

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Étudier le sens de variation sur $\mathbb{R}_+^*$ de f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^2 - x\ln x - 1$

(Indice : pour trouver le signe de $f'(x)$, on fera l'étude des variations la fonction f' et on ira donc jusqu'au calcul de la dérivée seconde de f, notée f'')

Session 2

Calculs : Identités remarquables

1. Rappeler les trois identités remarquables
2. Les appliquer sur les calculs suivants :
$A=(2-\sqrt{3})^2$ $\quad B=(-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$ $\quad C=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})$ $\quad D=302\times 298$ $\quad E=48^2$

Savoir-faire : Calculs de limites

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Donner les quatre formes indéterminées.
2. Opérations sur les limites : Compléter avec 0, $+\infty$ ou $-\infty$
$\frac{1}{+\infty}=\dots\dots$ $\quad \frac{1}{0^-}=\dots\dots$ $\quad -\infty\times\ell'=\dots\dots$ $\quad \frac{\ell}{-\infty}=\dots\dots$ $\quad \frac{+\infty}{0^-}=\dots\dots$ $\quad \frac{0^-}{+\infty}=\dots\dots$ $\quad \frac{0^+}{\ell}=\dots\dots$ $\quad \frac{\ell'}{0^-}=\dots\dots$ $\quad \frac{+\infty}{0^-}=\dots\dots$ $\quad \frac{+\infty}{\ell'}=\dots\dots$
3. Croissances comparées : Compléter avec 0, $+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\dots\dots$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2}=\dots\dots$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x=\dots\dots$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-3x}=\dots\dots$
4. Vérifier tous ses résultats en s'aidant du §1 du chapitre 2 du cours de M. Brossard et remplir le carnet avec les résultats non encore acquis.
5. Lire la méthode 1.4 et la méthode 1.5 de ce même cours et les exemples d'application.

✎ Exercice 2 (Application)

Déterminer les limites des fonctions données dans la session 1 et dresser les tableaux de variations complets de ces fonctions et vérifier la cohérence entre les variations et les limites trouvées.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

On continue sur le document fiche d'exercices à trous en s'intéressant aux calculs de limites. On complétera les tableaux de variations.

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus...)

Déterminer les limites aux bornes du domaine de l'ex 4 de la session 1.

Session 3

Calculs : Puissances

1. Rappeler les règles sur les puissances : x et y sont des réels strictement positifs et α et β des réels.
   - $x^0=\dots$
   - $x^\alpha x^\beta=\dots$
   - $\frac{x^\alpha}{x^\beta}=\dots$
   - $\frac{x^\alpha}{y^\alpha}=\dots$
   - $x^\alpha y^\alpha=\dots$
   - $(x^\alpha)^\beta=\dots$
   - $x^{-1}=\dots$
   - $x^{-\alpha}=\dots$
   - $\frac{1}{x^{-\alpha}}=\dots$
2. Exprimer les nombres sous forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et/ou de 5, puis sous forme d'une fraction irréductible.
$A=(3\times5^3)^2$ $\quad B=12^3$ $\quad C=\frac{81^2}{27^3}$ $\quad D=\frac{20^3\times4^{-2}}{5^{-2}\times50^2}$ $\quad E=\frac{(3^2)^3\times(2^3)^2}{(2^2)^3\times(3^3)^2}$ $\quad F=\frac{3^{2^3}\times2^{3^2}}{2^{2^3}\times3^{3^2}}$

Savoir-faire : Démonstration par récurrence

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler les différentes étapes à mettre en œuvre pour effectuer un raisonnement par récurrence.
2. Par quoi commence inévitablement l'hérédité ?
3. Relire la méthode 2.1 du chapitre 3 et les méthodes 3.1 et 3.2.2 du chapitre 6 et leurs exemples du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

En suivant les rédactions des exos-méthodes ci-dessus, démontrer les propositions suivantes :

1. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_{n+1}=u_n+3^n$ $\qquad$ Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{1}{2}\times3^n$.
2. (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0=0$ et $v_{n+1}=\frac{1}{5}(3+v_n^2)$. $\qquad$ Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\le v_n\le 1$
3. Montrer que la suite (v_n) définie dans l'item précédent est croissante.

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)**

(c_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} = \frac{c_n}{1+c_n}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1}$.

✎ **Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
3. Démontrer que la suite (u_n) est monotone *(pour savoir de quelle monotonie, commencer par calculer u_1 pour avoir une idée)*

Session 4

Calculs : Exponentielles

1. Rappeler les règles sur les exponentielles : a et b sont des réels.
   - $e^a e^b = \dots$
   - $\frac{e^a}{e^b} = \dots$
   - $\left(e^a\right)^b = \dots$
   - $e^{-a} = \dots$
   - $\sqrt{e^a} = \dots$
2. Rappeler les propriétés de la fonction exponentielle : domaine de définition, de dérivabilité, signe, dérivée, variation, limites.
3. Vérifier ses réponses en consultant le chapitre 0 du cours de M. Brossard, remplir le carnet.
4. Effectuer les calculs suivants :
   $A(x) = \left(e^{x-1}\right)^2$ $B(x) = e^x\left(1 - e^{-x}\right)$ $C(x) = \sqrt{e^{4x^2}}$ $D(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$ $E(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x}$

Savoir-faire : Déterminer le sens de variation d'une suite

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1. Rappeler quelles sont les différentes méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n).
2. Relire les méthodes 2.1, 2.2, 3.2.1 et 3.2.2 et leurs exemples du chapitre 6 du cours de M. Brossard.

✎ **Exercice 2 (Application)**

En suivant la rédaction des exos-méthodes ci-dessus, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^{-n}$
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$
4. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)**

Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 0{,}2^n + 3$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3n}{n+1}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n+1}{3n+4}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{7^n} + 1$
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^n}$

✎ **Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 4$ *(méthode 1.1 du chapitre 12 du cours de M. Brossard)*
2. Etudier les variations de (u_n).

Session 5

Calculs : Logarithme népérien

1. Rappeler les règles sur les logarithmes népériens : a et b sont des réels strictement positifs.
   - $\ln(ab) = \dots\dots$
   - $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots\dots$
   - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots\dots$
   - $\ln(a^n) = \dots\dots$
   - $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dots\dots$
2. Rappeler les propriétés de la fct logarithme népérien : domaine de définition, de dérivabilité, signe, dérivée, variation, limites.
3. Vérifier ses réponses en consultant le chapitre 0 du cours de M. Brossard, remplir le carnet.
4. Effectuer les calculs suivants :
   Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:
   $a = \ln 256$ $b = \ln\frac{1}{4}$ $c = 3\ln\frac{1}{8} + 4\ln\frac{1}{5}$ $d = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \dots + \ln\frac{498}{499} + \ln\frac{499}{500}$
   Simplifier les expressions suivantes :
   $A(x) = \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln x$ $B(x) = \ln\left(\sqrt{e^x}\right)$ $C(x) = e^{5\ln x}$ $D(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{e^x}}$ $E(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + \ln(x^2)$
5. Facultatif : envie de se confronter à une équation faisant intervenir le ln ? On pourra résoudre $\ln\left(e^x+1\right) - \ln\left(e^x-1\right) < 1$

Savoir-faire : Résoudre un système linéaire

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler ce qu'est un système de Cramer.
2. Quelle est la solution d'un système de Cramer homogène ?
3. Comment peut-on caractériser un système de Cramer grâce à la matrice de ce système ?
4. Que peut-il se passer lorsque le système n'est pas de Cramer ?
5. Relire la méthode 1.0 du chapitre 5 du cours de Mr. Brossard et l'exercice associé, et si besoin, remplir le carnet.

✎ Exercice 2 (Application)

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes suivants et dire s'il s'agit de systèmes de Cramer ou pas (après la résolution) :

a. $\begin{cases} a-2b+c=8 \\ 2a+b-c=-3 \\ -a+b+2c=3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -2x+2y-2z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{cases}$

2. En remarquant qu'il y a au moins un coefficient nul dans le système qui permet de commencer par une substitution, ou en effectuant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x+2z=0 \\ -2y+z=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ 3x-3z=0 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} -3x+y=0 \\ -3y+z=0 \\ 6x-11y+3z=0 \end{cases}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+2z=1 \\ -y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x-2y+2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

Session 6

Calculs : Calculs élémentaires avec les matrices

On considère les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&-1&-2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Effectuer les calculs suivants : $2A$, AB, CA, $A-3I_3$, A^2, A^3, A^3-4A^2+2A, D^2, D^3, BC et CB.

Savoir-faire : Inverser une matrice I

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler la **définition** d'une matrice inversible.
2. Bien relire les méthodes 2.2, 2.3, 2.4, et 2.5 du chapitre 5 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

En utilisant la méthode la plus adaptée, déterminer l'inverse de la matrice A dans chaque situation :

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\4&-1&-2\\4&-4&1\end{pmatrix}$ (indication : on commencera par calculer A^2)
4. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0{,}5\end{pmatrix}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Déterminer à quelle condition sur λ la matrice A est inversible.

1. $A=\begin{pmatrix}1-\lambda&3\\2&2-\lambda\end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix}1-\lambda&3\\-2&4-\lambda\end{pmatrix}$
3. $A=\mathrm{diag}(2-\lambda,3,\lambda^2-4)$
4. $A=\begin{pmatrix}2&3&\lambda\\0&\lambda+1&2\\0&0&\lambda^2-3\lambda+2\end{pmatrix}$

Session 7

Calculs : Factorielles et coefficients binomiaux

Dans tout cet exercice, on considère n et k deux entiers naturels non nuls avec $k \leq n$. (On pourra s'aider de la page 5 du chapitre 4 du cours de M. Brossard)

1. Rappeler les formules suivantes : $\binom{n}{k} = \dots$ $\binom{n}{0} = \dots$ $\binom{n}{1} = \dots$ $\binom{n}{2} = \dots$ $\binom{n}{n} = \dots$ $(n+1)n! = \dots$ $\frac{n!}{n} = \dots$ $0! = \dots$
2. $A = \frac{10!}{7!}$ $B = \binom{8}{3}$ $C = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ $D = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$ $E = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ $F = k\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1}$

Savoir-faire : Dénombrer et travailler en situation d'équiprobabilité

✎ Exercice 1 (Cours)

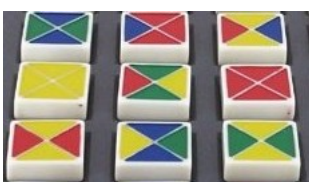
1. Quelles sont les deux situations-type où on utilise les coefficients binomiaux pour dénombrer ?
2. Qu'est-ce qu'une $p-$liste (ou $p-$uplet) d'un ensemble à n éléments E ? Combien y en a-t-il ?
3. Qu'est-ce qu'une permutation d'un ensemble à n éléments ? Combien y en a-t-il ?
4. Relire les méthodes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5 du chapitre 4 et la méthode 1.1 chapitre 7 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

1. Le code d'entrée dans un immeuble est une suite de 4 chiffres entre 0 et 9 suivit de la lettre A ou B.
   a. Combien de codes existe-t-il au total ?
   b. Si on se souvient des deux derniers chiffres et de la lettre, quelle est la probabilité de faire le bon code en tapant le reste au hasard ?
2. a. Dans un jeu de cartes de 32 cartes, combien de mains différentes de 5 cartes contiennent la dame de cœur ?
   b. Quelle est la probabilité d'avoir une telle main ?
3. Dans un jeu de cartes de 32 cartes, combien de mains différentes de 5 cartes contiennent exactement deux as ?
4. Dans un jeu de cartes de 32 cartes, combien de mains différentes de 5 cartes contiennent au moins un as ?
5. Dans une voiture de 5 places, combien y a-t-il de manières de répartir 3 personnes ayant toutes le permis pour effectuer un trajet ?

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour le fun)

Le jeu comporte des pièces carrées séparées en quatre zones délimitées par leurs diagonales et colorées en quatre couleurs différentes de sorte qu'il n'y ait pas deux pièces identiques dans le jeu (ni même image l'une de l'autre par symétrie axiale). De plus, lorsque une pièce comporte exactement deux fois la même couleur, ces couleurs sont disposées sur des zones non contigües. Un extrait du plateau de jeu est donné dans l'image suivante :



1. Combien de pièces différentes y a-t-il dans le jeu ?

Au début du jeu, on dispose toutes les pièces sur un plateau de jeu carré et il doit rester un emplacement vide.

2. Quelle est la taille du plateau ?

✎ Exercice 4 (Enigme)

Sami a 5 paires de chaussettes et 4 paires de socquettes. Au début, il avait un casier pour les socquettes et un casier pour les chaussettes mais au fil du temps, tout s'est mélangé. De combien de manières différentes peut-il placer ses chaussettes et ses socquettes dans les deux casiers ? Quelle est la probabilité qu'il tombe effectivement sur une paire de chaussettes en prenant une paire au hasard dans le casier des chaussettes ?

✎ Exercice 5 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$, $$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

Session 8

Calculs : Travailler avec des Σ

Avant d'effectuer ces calculs, on relira au besoin la page 1 du chapitre 4 du cours de M. Brossard.

1. Rappeler les formules suivantes : (n et m et p sont deux entiers naturels non nuls avec $p \leq n$, $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$)
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dots$ $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dots$ $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dots$ $\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha = \dots$ $\quad\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \dots$ $\quad\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=\dots}^{\dots}\sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i,j}$ $\quad\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \underset{(\dots\leq\dots\leq\dots\leq\dots)}{=} \sum_{j=\dots}^{\dots}\sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i,j}$
2. $A = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$ $\qquad B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$ $\qquad C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ $\qquad D = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n+1-k}$ $\qquad E = \displaystyle\sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^3$ $\qquad F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} k$
3. On pense toujours à remplir le carnet avec les résultats qu'on n'avait plus en tête afin de les avoir sous la main facilement pour les réviser régulièrement.

Savoir-faire : Déterminer la probabilité d'une réunion ou d'une intersection

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler les deux manières de calculer la probabilité d'une intersection. Vérifier sa réponse en relisant la méthode 1.3 et la formule citée page 2 du chapitre 7 du cours de M. Brossard.
2. Rappeler les deux manières de calculer la probabilité d'une réunion. Vérifier sa réponse en relisant la méthode 1.4 et la formule citée page 2 du chapitre 7 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Soit $n \geq 3$ un entier naturel non nul. Une urne est remplie avec n boules rouges et une boule verte toutes indiscernables au toucher.
Mise en garde :
Dans chaque item, avant de calculer les probabilités, on s'attachera à bien décrire les événements par une phrase, puis par une formule utilisant des $\cap$ et/ou $\cup$.

1. Dans cette question, on effectue 3 tirages sans remise.
   a. Quelle est la probabilité de l'événement A : "le joueur ne tire pas la boule verte" ?
   b. Quelle est la probabilité de l'événement B : "le joueur tire la boule verte au dernier ou à l'avant dernier tirage" ?
   c. En déduire la probabilité de l'événement C : "le joueur tire la boule verte au premier tirage".
2. On effectue maintenant 3 tirages avec remise. Quelle est la probabilité de l'événement D : "le joueur tire la boule verte pour la première fois au troisième tirage" ?

Session 9

Calculs : Racines carrées

1. Rappeler les règles calculatoires sur les racines : pour tout x et y éléments de $\mathbb{R}_+^*$
   - $\sqrt{x} = \dots$
   - $\sqrt{xy} = \dots$
   - $\sqrt{\frac{x}{y}} = \dots$
   - $\sqrt{x^n} = \dots$
   - $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dots$
   - $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dots$
   - $\left(\sqrt{x}\right)^2 = \dots$
   - $\sqrt{0} = \dots$

   Pour tout x réel :
   - $\sqrt{x^2} = \dots$
2. Mettre les nombres suivants sous la forme de $c + a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{N}$, b le plus petit possible ou simplifier au mieux :
$A = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad B = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ $\qquad C = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 5^5}$ $\qquad D = \left(\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^4$ $\qquad E = \left(4+\sqrt{11}\right)^2 - \left(4-\sqrt{11}\right)^2$ $\qquad F = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$
(Pour la dernière, le secret est d'aller de la droite vers la gauche, on peut même s'amuser à tout faire de tête !)

Savoir-faire : Montrer qu'une équation admet une unique solution (ou un nombre donné de solutions)

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Si on ne demande pas de résoudre une équation mais que l'on demande de prouver qu'elle a une unique solution, quel est le théorème que l'on doit utiliser ?
2. Bien relire les méthodes 2.1, 2.3 et 2.4 du chapitre 2 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Considérons $g : x \mapsto xe^{-x}$ et un entier naturel non nul n.
Montrons que g est bijective de $[1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de g^{-1}.
2. Considérons $f : x \mapsto \frac{1-\ln x}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$.
    - **a.** Montrons que f est bijective de $\left]0, e^2\right[$ dans un intervalle à déterminer et de $\left]e^2, +\infty\right[$ dans un autre intervalle à déterminer.
    - **b.** Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{10}$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$.
    - **c.** Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution, notée α_n dans $\left]0, e^2\right[$.
    - **d.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq \alpha_n \leq e$.
    - **e.** Exprimer α_n en fonction de n et f^{-1}.

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

Rajouter la question suivante dans l'exercice précédent : Déduire les variations de la suite (α_n), ainsi que sa limite.
(Pour cela, on anticipe les révisions en appliquant le théorème de la limite monotone, pourra aussi relire la méthode 2.1 du chapitre 12 du cours de M. Brossard)

Session 10

Calculs : Suites géométriques

1. Réviser les règles sur les puissances vues à la session 3.
2. Mettre les expressions suivantes sous la forme $a \times b^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$

$a_n = 2^{n+1} - 2^n \qquad b_n = 2^{2n} \times 3^{-n} \qquad c_n = 4^{n+1} - 2^{2n-3} \qquad d_n = (-1)^{n+1} 2^{2-3n} \qquad e_n = \dfrac{6^{n-1}}{3^n} \qquad f_n = \dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$

Savoir-faire : Suite récurrente linéaire d'ordre 2, suites arithmético-géométriques

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1.
    - **a.** Comment appelle-t-on une suite (u_n) qui vérifie à partir d'un certain rang la relation $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$?
    - **b.** Quelle est la première chose à faire pour l'étudier ?
2.
    - **a.** Comment appelle-t-on une suite (u_n) qui vérifie à partir d'un certain rang la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$?
    - **b.** Quelle est la première chose à faire pour l'étudier ?
3. On relira avec attention les méthodes 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 du chapitre 6 du cours de M. Brossard.

✎ **Exercice 2 (Application)**

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \end{cases}$
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)**

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ldots$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k = \ldots$
2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ldots$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} u_k = \ldots$

✎ **Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. En déduire son terme général.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ de deux manières.
4. En déduire le terme général de (u_n).

Session 11

Calculs : Factoriser

1. Réviser les identités remarquables vues à la session 2.
2. Factoriser les expressions suivantes le plus possible :

$a(x) = (x-2)(3x+5) - (2x-1)(2x-4) \qquad b(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad c(x) = 4x^2 - 1 + (x-3)(2x+1) \qquad d(x) = (x-1)^2 - 4$
$e(x) = (3x-5)^2 - (x-7)^2 \qquad f(x) = 3x - 6 + (x+1)(x-2) \qquad g(x) = x^2 - 49 - 3x(7-x) \qquad h(x) = (5x+2)(3x-7) + (5x+2)$

Savoir-faire : Calculer la puissance d'une matrice

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1. Quelles sont les **seules** matrices pour lesquelles on peut calculer la puissance en prenant la puissance de tous les coefficients ?
2. Relire les méthodes 2.7, 2.8 et 2.9 du chapitre 5 du cours de M. Brossard.

✎ **Exercice 2 (Application)**

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 1, \ v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$ Posons maintenant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Exprimer la matrice colonne X_{n+1} en fonction de u_n et v_n
2. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

4. Calculer P^{-1}, puis PDP^{-1}.
5. Pour tout entier naturel n, en déduire une expression de A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
6. Pour tout entier naturel n, expliciter D^n puis A^n.
7. Déterminer X_0 et en déduire X_n, pour tout entier naturel n.
8. En déduire les expressions explicites de u_n et v_n en fonction de n, pour tout entier n naturel.

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$ En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et en s'inspirant de l'exercice précédent en utilisant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 30 & 5 & -5 \\ 6 & -8 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, on déterminera l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel.

Session 12

Calculs : Trinôme du second degré

1. Donner la phrase permettant de justifier le signe d'un trinôme du second degré.
2. Déterminer les racines des trinômes suivants SANS calculer de discriminant
   $A(x) = x^2 + 4x$ $\qquad B(x) = x^2 - 5$ $\qquad C(x) = -x^2 - 9$
3. Déterminer le signe des expressions suivantes :
   $D(x) = x^2 + 3x - 4$ $\qquad E(x) = x^2 - 7x + 12$ $\qquad F(x) = -2x^2 + x - 5$
4. Factoriser les expressions suivantes :
   $G(x) = -2x^2 - 3x + 5$ $\qquad H(x) = x - x^2 + 2$ $\qquad J(x) = -3x^2 - 2x + 1$

Savoir-faire : La formule des probabilités totales

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1. Rappeler la formule des probabilités totales associée au .... $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$:

   $P(B) =$ .... $=$ ....

   condition pour la deuxième formule : ....
2. Relire la méthode 2.2 du chapitre 7 et la méthode 1.5 du chapitre 16 du cours de M. Brossard.

✎ **Exercice 2 (Application)**

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté PILE et un côté FACE. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté FACE.
Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté FACE"
- B_n l'évènement : "à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté PILE et l'autre côté FACE"
- C_n l'évènement : " à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté PILE"

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathrm{P}(A_n)$; $b_n = \mathrm{P}(B_n)$ et $c_n = \mathrm{P}(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de a_n et b_n. *(où il est déjà question de SCE...)*
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$. *(c'est ici que l'on utilise la FPT !)*
5. Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de b_n en sortie.
6. Déterminer le terme général de (b_n) puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

Une entreprise fabrique des balles à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A produit un tiers des balles et la machine B un quart des balles. 12% des balles produites par A, 9% des balles produites par B et 10% des balles produites par C ont un défaut. A la sortie des machines, les balles sont toutes mélangées. Avec des notations évidentes, déterminer la probabilité qu'une balle choisie au hasard en sortie d'usine présente un défaut.

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

On pourra traiter l'ex 174 disponible sur ce lien.

Session 13

Calculs : Polynômes et fonctions rationnelles

1. Donner deux manières de caractériser le fait de que α est la racine d'un polynôme P de degré n.
2. Après avoir trouvé une racine évidente α, factoriser le polynôme x^3+2x^2-5x-6 en utilisant deux méthodes différentes :
   a. La division euclidienne de polynômes
   b. L'identification de polynômes : trouver a, b et c tels que, pour tout x réel, $x^3+2x^2-5x-6 = (x-\alpha)(ax^2+bx+c)$
3. Déterminer l'unique couple de réels (a,b) tel que, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ (hyperclassique)

Savoir-faire : Equations différentielles

✎ Exercice 1 (Cours)

1.
   - Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto$ .... avec ....
   - **Une** solution de l'équation différentielle $y'+ay=c$ est donnée par $t \mapsto$ ......
   - Les solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
     - $t \mapsto$ .... avec .... lorsque l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2
     - $t \mapsto$ .... avec .... lorsque l'équation caractéristique admet une solution réelle double r_0
   - **Une** solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=c$ est donnée par $t \mapsto$ ......
2. Rappeler la dérivée de $x \mapsto e^{ax}$ avec a un réel non nul.
3. Traduire par une égalité la phrase suivante : f est solution de l'équation différentielle $y'+3y=5e^t$ sur $\mathbb{R}$.
4. Relire la méthode 4.1 du chapitre 15 du cours de M. Brossard et ses exercices d'application.

✎ Exercice 2 (Application)

Résoudre les équations différentielles données :

1. $y'+2y=2$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y'-2y=x^2$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x)=ax^2+bx+c$)*
3. $y'-4y=e^{4x}$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x)=(ax+b)e^{4x}$)*
4. $y''+y'-2y=4$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x)=(ax+b)e^{-x}$)*

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

On considère le problème de Cauchy : $(E) : \begin{cases} y'+2y-(x+1)\sqrt{y}=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y une solution du problème de Cauchy (E). On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x)>0$ et on pose $z=\sqrt{y}$.
   a. Vérifier que $2z'+2z=x+1$.
   b. En déduire les candidats-solutions possibles pour z (on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax$).
   c. En déduire les candidats-solutions possibles pour y.
2. Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème de Cauchy (E) ?

Session 14

Calculs : Valeurs absolues

1. Rappeler les règles calculatoires sur les valeurs absolues : ∘ $|xy| = \dots\dots\dots$ ∘ $|x^n| = \dots\dots\dots$ ∘ $\left|\frac{x}{y}\right| = \dots\dots\dots$
   ∘ Inégalité triangulaire : .... Si c est un réel et $r > 0$: ∘ $|x| \geq r \Leftrightarrow$ .... ∘ $|x-c| < r \Leftrightarrow$ ....

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a. $|x-6| = 2$ **b.** $|x+5| = \frac{1}{2}$ **c.** $|5-2x| = 1$ **d.** $|x-7| < 10^{-1}$ **e.** $|x+2| \geq 10^{-2}$ **f.** $|4+7x| \leq -\frac{1}{3}$

Savoir-faire : Etude d'une suite par le TLM

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Si une suite est décroissante et minorée par 2, que peut-on en déduire quand à la convergence de la suite ? par quel théorème ? Que peut-on savoir de sa limite ?
2. Relire les méthodes 2.3, 3.3 et 4.4 du chapitre 6 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x}$ et u_n la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \pm 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. Résolvons $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. cas $u_0 = 1$
   a. Démontrons que la suite (u_n) est décroissante et bornée par 0 et 1.
   b. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ puis déterminer ℓ.

   cas $u_0 = -1$
   a. Démontrons que la suite $u_{n+1} \leq u_n \leq -1$.
   b. En déduire que (u_n) diverge vers une limite $-\infty$. *(pour cela, on effectuera un raisonnement par l'absurde)*

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Avant de faire cet exercice, on pourra réviser la méthode 2.2 du chapitre 12 du cours de M. Brossard.

Considérons les suites (u_n) et (v_n), définies sur $\mathbb{N}^*$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Montrons que (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel.

Session 15

Calculs : Partie entière

1. Rappeler l'encadrement définissant la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x. *(rappel : il s'agit d'encadrer x en fonction de $\lfloor x \rfloor$, attention à bien gérer les inégalités strictes/larges !).*
2. En déduire l'encadrement de $\lfloor x \rfloor$ en fonction de x.
3. Calculer les nombres suivants :
   $A = \lfloor \pi \rfloor$ $B = \lfloor -6{,}5 \rfloor$ $C = \lfloor |-1{,}25| \rfloor$ $D = |\lfloor -1{,}25 \rfloor|$ $E = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor - \frac{7}{2}$ $F = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \frac{n}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Savoir-faire : Etude d'une suite par l'IAF

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Bien que l'inégalité des accroissements finis soit une propriété d'analyse fonctionnelle, on s'en sert dans le programme d'ECG dans le cadre de l'étude des suites définies par récurrence définie grâce à une fonction. Rappeler cette propriété avec toutes ses hypothèses et dans quel cadre on s'en sert pour l'étude d'une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Relire la méthode 2.2 du chapitre 10 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Justifier que f possède un unique point fixe noté α, et que $\alpha \in [0,1]$. *(indic : on utilise le thm de la bijection)*
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
5. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. Conclure que (u_n) converge et donner sa limite.

Session 16

Calculs : Fractions II

1. Réviser les règles de calculs sur les fractions vues en session 1.
2. Mettre au même dénominateur les expressions suivantes
   $A(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1}$ $\quad B(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}$ $\quad C(x) = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}$ $\quad D(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}$ $\quad E(x) = \frac{3}{x^2-4} + \frac{2x}{(x-2)^2}$

Savoir-faire : Inverser une matrice II

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler la définition d'une matrice inversible.
2. Relire la méthode 2.6 du chapitre 5 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 + A^2 - 5A$. *(Si tu ne trouves pas un résultat simple, recommence tes calculs)*
2. En déduire que A est inversible et détermine l'inverse de A en fonction de A^2, A et l'identité.
3. Expliciter les 9 coefficients de A.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 5A$.
2. A est-elle inversible ? Si oui, exprimer son inverse (Le montrer par deux moyens différents et vérifier la cohérence des résultats)

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin (d'après EML))

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. a. Calculer K^2.
   b. En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.
2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
   a. Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.
   b. En déduire que, si $(a,b) \neq (0,0)$, alors M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.
   c. Application : donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sous forme de combinaison linéaire de I et K

Session 17

Calculs : manipulation d'inégalités

1. Dans chaque situation, donner l'encadrement **le plus fin possible** (ou une inégalité la plus fine possible) portant sur la quantité donnée en argumentant correctement.

   a. $-5 \leq x \leq -2$, quantité donnée : x^2
   b. $-2 < x < 0$, quantité donnée : $\frac{1}{x}$
   c. $1 \leq k \leq n$, quantité donnée : $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
   d. $1 \leq x \leq 3$, quantité donnée : $\frac{2x+5}{x+2}$
   (On pourra commencer par exprimer $\frac{2x+5}{x+2}$ sous la forme $a + \frac{b}{x+2}$)

2. Extrait d'Edhec 2025 : On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$.

En déduire l'encadrement $\quad \ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln n + 1, \quad$ puis trouver la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$

Savoir-faire : Lois de référence

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Compléter le tableau suivant :

X suit la loi...	notation	univers image	probabilité $P(X=k)$	espérance	variance
Certaine égale à a	néant				
	$\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$				
	$\mathscr{B}(p)$				
	$\mathscr{B}(n,p)$				
	$\mathscr{P}(\lambda)$				
Géométrique de paramètre p					

2. Donner les situations-type permettant de reconnaître que X suit :
   a. une loi binomiale de paramètres n et p
   b. une loi géométrique de paramètre p
   c. une loi de Bernoulli de paramètre p
   d. une loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$

✎ Exercice 2 (Ce chapitre me fait très peur, je veux un exercice plutôt facile)

Dans chaque cas, reconnaître la loi de X puis préciser son univers-image $X(\Omega)$, son espérance et sa variance, et $P(X=k)$ pour k dans l'univers-image correspondant.

1. Un débutant en tir à l'arc rate sa cible dans 30%. Il effectue une série de 12 tirs. X compte le nombre de tirs ayant atteint la cible.
2. On lance un dé tétraédrique (à quatre faces) parfaitement équilibré jusqu'à obtenir 4 pour la première fois. La variable aléatoire X désigne le nombre de tirages nécessaires.
3. En France, il y a environ 42% d'individus ayant un groupe sanguin O. La variable aléatoire X désigne le nombre d'individus du groupe O dans un échantillon de 30 personnes prises totalement au hasard.
4. On lance deux pièces équilibrées telles que la première a une face "0" et une face "1" et la seconde a une face "1" et une face "3". La variable aléatoire X désigne la somme des deux nombres obtenus.
5. On lance deux pièces équilibrées jusqu'à obtenir un double "Pile". La variable aléatoire X désigne le rang de ce premier double "Pile".
6. Un péage autoroutier comporte 20 guichets tous identiques et les voitures arrivant au péage choisissent le guichet complètement au hasard de manière indépendante les unes des autres. Il passe n voitures dans un laps de temps donné. X désigne le nombre de voitures qui sont passées au guichet le plus droite de ce péage.

✎ Exercice 3 (et/ou : Je me challenge sur des questions tirées d'une annale de l'EDHEC)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de $n+1$ urnes, numérotées de 1 à $n+1$, et contenant chacune n boules.
Pour tout k de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, l'urne numéro k contient $k-1$ boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée $n+1$ ne contient que des boules noires). L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.

Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, on note U_k l'événement : "On a choisi l'urne numérotée k".
On appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur j ($j \in \mathbb{N}^\star$) si la première boule blanche apparaît au j-ième tirage.

1. Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, déterminer $\mathrm{P}(U_k)$.
2. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k.
3. **a.** Déterminer $\mathrm{P}_{U_{n+1}}\big([X_n=1]\big)$.
   b. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner $\mathrm{P}_{U_k}\big([X_n=1]\big)$.
   c. Montrer alors que $\mathrm{P}\big([X_n=1]\big)=\frac{1}{2}$.

Session 18

Calculs : Primitives

1. I un intervalle sur lequel u est dérivable. Remplir le tableau suivant :

fonction $x \mapsto \dots$	a	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha \neq 1)$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^{ax}
primitive $x \mapsto \dots$							
fonction	au'	$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u'}{u^\alpha}$ $(\alpha \neq 1)$	$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'e^u$
primitive							
Condition sur u			$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	

2. Sans se préoccuper des domaines, calculer formellement une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x)=\frac{1}{x-1} \qquad g(x)=\frac{3}{(x-2)^2} \qquad h(x)=e^{5x} \qquad j(x)=\frac{3x^2}{2+x^3}$$

$$k(x)=\frac{5x}{\sqrt{3+x^2}} \qquad \ell(x)=\frac{(\ln x)^2}{x} \qquad m(x)=\frac{8e^{2x}}{(3-e^{2x})^3} \qquad n(x)=\frac{3x^2+x-4}{x^2}$$

Savoir-faire : Intégrer à vue

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Quelle propriété invoque-t-on lorsque l'on veut justifier cette implication, et à quelle condition sur f cela peut-il se faire :

$$\Big[\forall t \in [a,b], \quad f(t) \geq 0\Big] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

2. Quelle propriété invoque-t-on lorsque l'on veut justifier cette implication (à condition que l'on ait justifié de l'existence de toutes les intégrales mises en jeu) :

$$\int_a^b \alpha f(t)+\beta g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Relire la méthode 1.1 du chapitre 8 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_{-1}^{2} 3x^2+4x-5\ \mathrm{d}x \qquad B=\int_{-1}^{1} 6x^5-4x^3+7x\ \mathrm{d}x \qquad C=\int_0^1 3\sqrt{x}-4x\ \mathrm{d}x \qquad D=\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3} \qquad E=\int_0^2 |x^2-3x+2|\ \mathrm{d}x$$

$$F=\int_1^5 \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x \qquad G=\int_{-1}^{2} e^{-2x+1}\ \mathrm{d}x \qquad H=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x} \qquad I=\int_{-1}^{2}(3x-2)^3\ \mathrm{d}x \qquad J=\int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+2}\ \mathrm{d}x$$

Session 19

Calculs : Formule du binôme de Newton

1. Enoncer la formule du binôme de Newton.

2. On rappelle que cette formule peut s'utiliser dans les deux sens (factorisation et développement). Identifier dans quel sens on développe et dans quel sens on factorise.
3. Utiliser la formule du binôme de Newton dans les cas suivants :
   - **a.** Pour développer :
     $A(x) = (1+x)^5$ $\quad B(x) = (1-x)^n$ $\quad C(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)^n$ $\quad D(t) = (1+2t)^{2n}$
   - **b.** Pour factoriser :
     $E = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ $\quad F = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ $\quad$ Plus difficile : $G = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} \binom{n}{k} \times 3^{n-k}$
   - **c.** Pour ceux qui veulent se challenger, un extrait d'Ecricome 2025, Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}$$

Savoir-faire : Séries

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Compléter :
   - **a.** Séries géométriques : condition sur q : ....

Géométrique	Géométrique généralisée	Géométrique dérivée première	Géométrique dérivée seconde
.... = ...	.... = ...	.... = ...	.... = ...

   - **b.** Série exponentielle : .... = ...
2. Relire les méthodes 2.1 et 2.2 du chapitre 14 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Dans chaque cas, donner l'argument qui permet de justifier que la série concernée est convergente et calculer la somme indiquée :

$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ $\quad B = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^{k+1}}$ $\quad D = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ $\quad E = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$

$F = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}}$ $\quad G = \sum_{k=2}^{+\infty} k2^{-k}$ $\quad H = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}$ $\quad I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ $\quad J = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{k!}$

Session 20

Calculs : Fractions III

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

1. **a.** $A_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$
   b. $B(a,b) = \frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, tels que $a \neq b$
   c. $C_n = \frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$
2. Comparer les fractions suivantes avec le signe ">", "<" ou "=" : **a.** $\frac{3}{5} \ldots \frac{5}{9}$ **b.** $\frac{12}{11} \ldots \frac{10}{12}$ **c.** $\frac{105}{21} \ldots \frac{125}{25}$

Savoir-faire : Montrer qu'une famille est libre

✎ Exercice 1 (Cours)

1. De combien de vecteurs peut-être constituée une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 4 ?
   (Si on ne connaît pas la réponse, on cherchera l'information en relisant la page 3 du du chapitre 17 du cours de M. Brossard AVANT de lire la correction)
2. Bien relire les deux premiers paragraphes de la page 3 et la méthode 2.3 du chapitre 17 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Donner un argument rapide ou une justification plus étoffée pour dire si les familles suivantes sont libres ou liées dans les espaces vectoriels considérés :

1. $((1,3,0))$ dans $\mathbb{R}^3$
2. $\left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right), (-3,1,-2)\right)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. $((1,2,0),(3,-1,2),(1,0,-1))$ dans $\mathbb{R}^3$
4. $((0,0,0,0))$ dans $\mathbb{R}^4$
5. $((1,1),(-1,0),(0,1),(1,-1))$ dans $\mathbb{R}^2$
6. $((1,2,3),(0,4,6))$ dans $\mathbb{R}^3$

Session 21

Calculs : Calculs avec des sigma II

1. Compléter les formules suivantes : (n et m sont deux entiers naturels non nuls)

   $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=\dots}^{\dots}\sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i,j}$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \underset{(\dots\leq\dots\leq\dots\leq\dots)}{=} \sum_{j=\dots}^{\dots}\sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i,j}$

2. $\displaystyle A = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ $\qquad$ $\displaystyle B = \prod_{k=1}^{n} 2^k$ $\qquad$ $\displaystyle C = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ $\qquad$ $\displaystyle D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ $\qquad$ $\displaystyle E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij$

Savoir-faire : Loi d'une variable aléatoire discrète

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Si X est un variable aléatoire discrète, comment appelle-t-on l'ensemble $X(\Omega)$?
2. Si X est un variable aléatoire discrète, que représente l'ensemble $\{(X=k), k \in X(\Omega)\}$?
3. Si X est un variable aléatoire discrète, que vaut $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} \mathrm{P}(X=k)$?
4. Relire les méthodes 1.1 du chapitre 9 et 1.1 et 1.2 du chapitre 16 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

1. On lance deux dés à 4 faces numérotées de 0 à 3 et on note X le produit des deux faces obtenues. Quelle est la loi de X ? L'expliciter sous forme de tableau.
2. On considère un ensemble de 10 clients différents. 2 clients parmi eux sont mécontents. On contacte 5 clients au hasard parmi les 10. Soit X le nombre de clients mécontents parmi les 5 contactés. Quelle est la loi de X ? L'expliciter sous forme de tableau.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Reprenons l'ex 3 de la session 17 et ajoutons les questions suivantes :

3. **d.** En admettant que $\mathrm{P}\big([X_n \geq 2]\big) = \frac{n-1}{2(n+1)}$, déduire l'expression de $\mathrm{P}\big([X_n = 0]\big)$ en fonction de n.

   e. Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?

Session 22

Calculs : Calcul matriciel II

1. Calculer les produits matriciels suivants et observer ce qui se passe :

   $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Compléter ensuite les phrases qui suivent :

   a. Multiplier à droite une matrice carrée par une matrice colonne revient à faire la .... des .... de cette matrice affectée des .... de la colonne.

   b. Multiplier à gauche une matrice carrée par une matrice ligne revient à faire la .... des .... de cette matrice affectée des .... de la ligne.

3. Forts de ces constatations, effectuer astucieusement suivant le calcul matriciel suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 8 & -7 & 9 & -8 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Savoir-faire : Propriétés de certaines fonctions

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Rappeler la définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire et donner les conséquences graphiques.
2. Qu'est ce que veut dire qu'un intervalle I est stable par une fonction f ?
3. Relire les méthodes 3.1 et 3.2 du chapitre 10 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Déterminer la parité des fonctions suivantes : **1.** $f(x) = \frac{3x^3-5x}{x^2+2}$ $\qquad$ **2.** $g(x) = \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$ $\qquad$ **3.** $h(x) = \ln\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

✎ Exercice 3 (Application)

Soit f la fonction définie sur $[1,3]$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$. Montrer que $[1,3]$ est stable par f.

Session 23

Calculs : au choix

Choisir des calculs dans le cahier de calcul en rapport avec une session qui a particulièrement posé problème. (on pensera bien à consulter avant ce document pour ne pas faire de hors-programme)

Savoir-faire : Démonstration par récurrence II

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Par quoi commence immanquablement l'étape de l'hérédité, déjà ???
2. Relire la méthode 1.1 du chapitre 12 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{u_n+2}$.
Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 3$.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus...)

Faire ou refaire l'ex 4 de la session 3

Session 24

Calculs : au choix

Choisir des calculs dans le cahier de calcul en rapport avec une session qui a particulièrement posé problème. (on pensera bien à consulter avant ce document pour ne pas faire de hors-programme)

Savoir-faire : Exprimer un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ en tant que sous-espace engendré par une famille

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Que veut dire la notation "Vect(...)" ? Et en particulier, que désigne $\text{Vect}(\vec{u})$?
2. Comment prouve-t-on qu'une famille de deux vecteurs est libre ?
3. Comment prouve-t-on qu'une famille d'un vecteur est libre ?
4. Relire les méthodes 2.2, 2.3 et 2.4 du chapitre 17 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

En trouvant une famille génératrice des ensembles suivants, montrer que ce sont des espaces vectoriels et donner la dimension de ces espaces vectoriels.

1. $E = \{(a, b-a) \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $E = \{(x+y, y-x, 3x) \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 2y\}$
4. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = -y\}$
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$
6. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$

Session 25

Calculs : au choix

Choisir des calculs dans le cahier de calcul en rapport avec une session qui a particulièrement posé problème. (on pensera bien à consulter avant ce document pour ne pas faire de hors-programme)

Savoir-faire : Calculs d'espérance et de variance

✎ Exercice 1 (Cours)

1. • $\text{E}(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\text{E}(X^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • Formule de Koenig-Huygens : $\text{V}(X) = \ldots\ldots\ldots$

   condition pour tous ces calculs d'espérance ....

   • Théorème de transfert : $\text{E}(g(X)) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- Linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(aX+b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- Règle calculatoire sur la variance : $\mathrm{V}(aX+b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. Rappeler les liens entre convergence d'une série et absolue convergence d'une série.
3. Relire les méthodes 1.3 et 1.4 du chapitre 9 et les méthodes 1.3 et 1.4 du chapitre 16 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (je mets les mains dans le cambouis)

Démontrer les résultats de cours :

1. Espérance et variance d'une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
2. (⋆⋆) Espérance et variance d'une loi géométrique de paramètre p. *(au fait, $k^2 = k(k-1)+k$, vous vous souveniez ?)*
3. (⋆⋆) Espérance et variance d'une loi de Poisson de paramètre λ.
4. (⋆⋆) Espérance et variance d'une loi binomiale de paramètres n et p en se servant des indications suivantes :
   - **a.** Pour le calcul de l'espérance, il pourra être utile de commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
   - **b.** Révisez la formule du binôme de Newton, cela pourra servir !
   - **c.** Pour le calcul de la variance, trouver une formule similaire au a. donnant un résultat sur $k(k-1)\binom{n}{k}$.

Session 26

Calculs : au choix

Choisir des calculs dans le cahier de calcul en rapport avec une session qui a particulièrement posé problème. (on pensera bien à consulter avant ce document pour ne pas faire de hors-programme)

Savoir-faire : Effectuer une intégration par parties

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Intégration par parties : Si u et v sont $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ sur $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. Relire la méthode 1.2 du chapitre 8 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

En effectuant une ou plusieurs intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I = \int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle I = \int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle I = \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
4. $\displaystyle I = \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$