➠ Corrigés du cahier de vacances ➠

Table des matières

1. Session 1

✎ Calculs

$$A=\frac{3+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{5}}=\frac{\frac{10}{3}}{-\frac{2}{5}}=-\frac{\cancel{2}\times 5}{3}\times\frac{5}{\cancel{2}}=\boxed{-\frac{25}{3}}$$

$$B=\frac{15}{22}\times\frac{46}{35}\times\frac{77}{69}=\frac{\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{2}\times\cancel{23}\times\cancel{7}\times\cancel{11}}{\cancel{2}\times\cancel{11}\times\cancel{5}\times\cancel{7}\times\cancel{3}\times\cancel{23}}=\boxed{1}$$

$$C=\frac{11}{15}+\frac{7}{6}-\frac{13}{10}=\frac{11\times 2+7\times 5-13\times 3}{3\times 5\times 2}=\frac{22+35-39}{30}=\frac{18}{30}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

$$D=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{13}}=1+\frac{1}{\frac{30}{13}}=1+\frac{13}{30}=\boxed{\frac{43}{30}}$$

$$E=\frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{10}}=\frac{\frac{25+6}{30}}{\frac{50-21}{30}}=\boxed{\frac{31}{29}}$$

✎ Exercice 2 (Application)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles (on a bien $x\neq 0$ et $x>0$)
   Donc $\forall x>0$,

$$\begin{aligned} f(x)&=\ln x+\tfrac{1}{x} && \text{Réflexe : on met ici } f(x) \text{ sous forme développée } \textit{(il est plus facile de dériver une somme qu'un quotient)}\\ f'(x)&=\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x^2} \\ &=\tfrac{x-1}{x^2} && \text{Réflexe : on factorise la dérivée } \textit{(ici cela revient à mettre tout au même dénominateur)}\end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du même signe que $x-1$. *(phrase souvent utile à connaître par cœur)*
   Donc f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles (car $x>0$).
   $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x)&=-2x\ln x-x^2\cdot\tfrac{1}{x}\\ &=-2x\ln x-x\\ &=x\big(-2\ln x-1\big) && \text{Réflexe !}\end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du même signe que $-2\ln x-1$
   Or $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} -2\ln x-1\geq 0 &\Leftrightarrow -2\ln x\geq 1\\ &\Leftrightarrow \ln x\leq -\tfrac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x\leq e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

   donc f est croissante sur $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles (car $x>0$, $1+x>0$ et $x\neq 0$).
   $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{1+x}-\tfrac{1}{x^2}\\ &=\tfrac{x(1+x)}{x^2(1+x)}-\tfrac{x^2}{x^2(1+x)}-\tfrac{1+x}{x^2(1+x)} && \text{Réflexes ! } \textit{(mettre au m̂ dénom et trouver le meilleur dénom commun)}\\ &=\tfrac{x+x^2-x^2-1-x}{x^2(1+x)}\\ &=\tfrac{-1}{x^2(1+x)}\end{aligned}$$

   Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est de signe strictement négatif car son numérateur est positif sur $\mathbb{R}_+^*$
   donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

Les corrigés sont disponibles ici.

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles $(x>0)$ et $\forall x>0$:

- $f'(x)=2x-\ln x-1$

- $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$ est du même signe que $2x-1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		$1/2$		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	
signe de $f'(x)$			$+$		
variations de f			$\nearrow$		

f' est décroissante sur $]0;1/2]$ et croissante sur $[1/2;+\infty[$
avec $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 > 0$
elle admet en $1/2$ un minimum qui vaut $\ln 2 > 0$
donc $\forall x > 0, \quad f'(x) > 0$

donc $\quad f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Session 2

✎ Calculs

1. Identités remarquables : • $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
2. $A = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = \boxed{7 - 4\sqrt{3}}$ $\quad B = \left(-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{15} + 5 = \boxed{8 - 2\sqrt{15}}$ $\quad C = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)\left(5 + 2\sqrt{6}\right) = 25 - 4 \times 6 = \boxed{1}$
   $D = 302 \times 298 = (300+2)(300-2) = 300^2 - 2^2 = 90\,000 - 4 = \boxed{89\,996}$ $\quad E = 48^2 = (50-2)^2 = 2\,500 - 200 + 4 = \boxed{2\,304}$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Les quatre formes indéterminées sont : • $\infty - \infty$ • $0 \times \infty$ • $\frac{0}{0}$ • $\frac{\infty}{\infty}$
2. Opérations sur les limites : Compléter avec 0, $+\infty$ ou $-\infty$
   $\frac{1}{+\infty} = 0 \quad \frac{1}{0^-} = -\infty \quad -\infty \times \ell' = +\infty \quad \frac{\ell}{-\infty} = 0 \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \quad \frac{0^-}{+\infty} = 0 \quad \frac{0^+}{\ell} = 0 \quad \frac{\ell'}{0^-} = +\infty \quad \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \quad \frac{+\infty}{\ell'} = -\infty$
3. Croissances comparées :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{x^2} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} \ln x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$

✎ Exercice 2 (Application)

RAPPEL important : AVANT de se lancer dans un calcul de limite, le premier réflexe à faire est de regarder si on peut trouver la limite par simples opérations sur les limites (comme dans le 2. du cours ci-dessus) ou s'il s'agit d'une forme indéterminée (et dans ce cas, on essaye de reconnaître une croissance comparée, éventuellement après transformation de l'écriture de l'expression)

1.
   - $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissances comparées donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x + 1 = 1$ et par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
   - On rappelle que $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   - Puisque l'on a en outre $f(1) = 1$, on en déduit

x	0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2.
   - $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
   - Par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
   - Puisque l'on a en outre $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2e}$, on en déduit

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

3.
   - $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ donc on ne s'occupe que de lever l'indétermination donnée par les deux autres termes.
     $\lim\limits_{x\to 0} \ln x + \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln x + 1}{x}$. Il s'agit de la même limite que dans le 1. donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   - $\forall x > 0$, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \frac{1}{x}$.
     $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   - On a donc

x	0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)**

Les corrigés sont disponibles ici.

✎ **Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

- par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$
- $\forall x > 0, \quad f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - 1$. Or par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc par opérations sur les fonction, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- On en déduit le tableau

x	0		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Session 3

✎ **Calculs**

1. Rappeler les règles sur les puissances : x et y sont des réels strictement positifs et α et β des réels.
   - $x^0 = 1$
   - $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
   - $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
   - $\dfrac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha$
   - $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$
   - $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$
   - $x^{-1} = \frac{1}{x}$
   - $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
   - $\frac{1}{x^{-\alpha}} = x^\alpha$

2. Avez-vous bien lu les consignes ?

$A = \left(3\times 5^3\right)^2 = 3^2 \times \left(5^3\right)^2 = \boxed{3^2 \times 5^6}$

$B = 12^3 = (4\times 3)^2 = (2^2\times 3)^2 = (2^2)^2 \times 3^2 = \boxed{2^4 \times 3^2}$

$$C = \frac{81^2}{27^3} = \frac{(3^4)^2}{(3^3)^3} = \frac{3^8}{3^9} = \boxed{3^{-1} = \frac{1}{3}}$$

$$D = \frac{20^3 \times 4^{-2}}{5^{-2}\times 50^2} = \frac{(2^2)^3\cdot 5^3\cdot (2^2)^{-2}}{5^{-2}\cdot (5^2)^2 \times 2^2} = \frac{2^6\cdot 5^3\cdot 2^{-4}}{5^{-2}\cdot 5^4\times 2^2} = 2^{6-4-2}\times 5^{3+2-4} = \boxed{5}$$

$$E = \frac{\left(3^2\right)^3 \times \left(2^3\right)^2}{\left(2^2\right)^3 \times \left(3^3\right)^2} = \frac{3^6\times 2^6}{2^6\times 3^6} = \boxed{1}$$

$$F = \frac{3^{2^3}\times 2^{3^2}}{2^{2^3}\times 3^{3^2}} = \frac{3^8\times 2^9}{2^8\times 3^9} = \boxed{2^1\times 3^{-1} = \frac{2}{3}}$$

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1. **Présenter la propriété** en lui donnant un nom (HR_n par exple) et en mettant le quantificateur en tout début de ligne.

   Initialisation au bon rang (pour $n = 0$ ou pour $n = 1$, ou ...)

   Si la propriété est une égalité, justifier correctement cette égalité (calculer un membre pour retomber sur l'autre OU calculer chaque membre de son côté et constater que l'on tombe bien sur le même résultat)

   Hérédité Commencer par "Soit $n \in$ ..., on suppose que HR_n est vérifiée" et finir par "donc HR_{n+1} est vérifiée".

   Conclusion

2. "**Soit** $n \in$ ..., on suppose que HR_n est vérifiée"

✎ **Exercice 2 (Application)**

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : $u_n = \frac{1}{2}\times 3^n$

   Initialisation $u_0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 3^0$ donc HR_0 est vérifiée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 3 \\
&= \tfrac{1}{2}\times 3^n + 3^n && \text{d'après } HR_n \\
&= 3^n\left(\tfrac{1}{2}+1\right) \\
&= 3^n \times \tfrac{3}{2} = 3^n\times 3\times\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\times 3^{n+1}
\end{aligned}$$

   Donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} \times 3^n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : $0 \leq v_n \leq 1$

   Initialisation $v_0 = 0$ donc $0 \leq v_0 \leq 1$ donc HR_0 est vérifiée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée

$$\begin{array}{rll} \text{on a} & 0 \leq v_n \leq 1 & \text{d'après } HR_n \\ \text{donc} & 0 \leq v_n^2 \leq 1 & \text{par croissance de la fct carrée sur } \mathbb{R}^+ \\ \text{c-à-d} & 3 \leq 3 + v_n^2 \leq 4 & \\ \text{donc} & \frac{3}{5} \leq \frac{1}{5}\left(3 + v_n^2\right) \leq \frac{4}{5} & \\ \text{donc} & 0 \leq \frac{3}{5} \leq v_{n+1} \leq \frac{4}{5} \leq 1 & \end{array}$$

   Donc HR_{n+1} est vérifiée

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq 1$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : $v_n \leq v_{n+1}$

   Initialisation $v_0 = 0$ donc $v_1 = \frac{3}{5}$ donc $v_0 \leq v_1$ donc HR_0 est vérifiée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée

$$\begin{array}{rll} \text{on a} & 0 \leq v_n \leq v_{n+1} & \text{d'après } HR_n \text{ et la question précédente} \\ \text{donc} & v_n^2 \leq v_{n+1}^2 & \text{par croissance de la fct carrée sur } \mathbb{R}^+ \\ \text{c-à-d} & 3 + v_n^2 \leq 3 + v_{n+1}^2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{5}\left(3 + v_n^2\right) \leq \frac{1}{5}\left(3 + v_{n+1}^2\right) & \\ \text{c-à-d} & v_{n+1} \leq v_{n+2} & \end{array}$$

   Donc HR_{n+1} est vérifiée

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq v_{n+1}$

   On en déduit donc que (v_n) est croissante.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : $c_n = \frac{1}{n+1}$

Initialisation $c_0 = 1 = \frac{1}{1+0}$ donc HR_0 est vérifiée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{c_n}{1+c_n} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} && \text{d'après } HR_n \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}$

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : u_n existe et $u_n > 0$

   Initialisation $u_0 = \frac{1}{2}$ donc u_0 existe et $u_0 > 0$ donc HR_0 est vérifiée.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée $u_n > 0$ d'après HR_n donc $2u_n > 0$ et $u_n + 1 > 0$, en particulier $u_n + 1 \neq 0$, ce qui assure l'existence du quotient $\frac{2u_n}{u_n+1}$ et par la règle des signes, $u_{n+1} > 0$ donc Donc HR_{n+1} est vérifiée

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n$ existe et $u_n > 0$

   Donc (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Remarque : on note bien l'utilisation des parenthèses autour de (u_n) dans l'énoncé et à la fin et la nécessité de ne **surtout pas les mettre** dans la démonstration par récurrence dans laquelle, on se focalise sur LE terme u_n.

2. Similaire à l'ex 2
3. Similaire à l'ex 2

4. Session 4

✎ Calculs

1. a et b sont des réels : ∘ $e^a e^b = e^{a+b}$ ∘ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ ∘ $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$ ∘ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ∘ $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$
2. La fonction exponentielle est définie, dérivable, et même $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. e^x est **strictement** positive pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\exp' = \exp$, la fonction exponentielle est strictement croissante, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
4. $A(x) = \left(e^{x-1}\right)^2 = e^{2x-2}$ $B(x) = e^x\left(1-e^{-x}\right) = e^x - e^x e^{-x} = e^x = e^{x-x} = e^x - 1$ $C(x) = \sqrt{e^{4x^2}} = e^{\frac{4x^2}{2}} = e^{2x^2}$
$D(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \left((e^x+e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\right)\left((e^x+e^{-x}) + (e^x - e^{-x})\right) = 2e^{-x} \times 2e^x = 4$ $E(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x} = 1 - e^{-2x}$

✎ Exercice 1 (Cours)

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut

- Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:
  - S'il est positif, la suite est croissante ;
  - S'il est négatif, la suite est décroissante.
- Si u_n est à valeurs strictement positives, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :
  - S'il est plus grand que 1, la suite est croissante ;
  - S'il est plus petit que 1, la suite est décroissante.
- On calcule les deux premiers termes de la suite et on les compare :
  - Si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence la propriété $u_n \leq u_{n+1}$;
  - Si $u_0 \geq u_1$, on montre par récurrence la propriété $u_n \geq u_{n+1}$

✎ Exercice 2 (Application)

En suivant la rédaction des exos-méthodes ci-dessus, déterminer les variations de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3\times 2^{-(n+1)}}{3\times 2^{-n}} = \dfrac{2^{-n-1}}{2^{-n}} = 3^{-n-1+n} = 3^{-1} = \frac{1}{3} < 1$ donc (u_n) est strictement décroissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = \left(u_n - 1\right)^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : $u_n < u_{n+1}$
Initialisation $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 < u_1$ donc HR_0 est vérifiée.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que HR_n est vérifiée.
$u_n < u_{n+1}$ d'après HR_n donc $u_n + 2 < u_{n+1} + 2$
donc $\sqrt{u_n+2} < \sqrt{u_{n+1}+2}$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$
donc $u_{n+1} < u_{n+2}$
Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$
donc (u_n) est croissante

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5\times 0{,}2^{n+1} - 5\times 0{,}2^n = 5\times 0{,}2^n(0{,}2-1) = -4\times 0{,}2^n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)^2 - 3n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = 3\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
4. Même technique. On trouve que (u_n) est croissante.
5. Même technique encore, les calculs et le résultat sont similaires à la question 2.
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{n} = \dfrac{n+1}{2n} \leq 1$ car $n \geq 1$ donc $2n \geq n+1$ (en additionnant n à chaque membre) donc (u_n) est décroissante.

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. Effectuons un raisonnement par récurrence.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose HR_n : "u_n existe et $u_n \geq 4$"
Initialisation : $u_1 = 4$ donc HR_1 est bien vérifiée.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que HR_n est vérifiée.

Alors $u_n \geq 4$ et donc le calcul $u_n\sqrt{u_n}$ est licite et par suite u_{n+1} existe.

De plus, si $u_n \geq 4$ alors $\sqrt{u_n} \geq 2$ par croissance de la fonction racine carrée et en multipliant membre à membre ces deux inégalités (licite car elles ne font intervenir que des nombres positifs, on obtient $u_n\sqrt{u_n} \geq 8$ et on a donc bien $u_{n+1} \geq 4$, c'est-à-dire que HR_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 4$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 4$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n\sqrt{u_n}}{u_n} = \sqrt{u_n} \geq 2 > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.

5. Session 5

✎ Calculs

1. Rappeler les règles sur les logarithmes népériens : a et b sont des réels strictement positifs.
   - $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
   - $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
   - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
   - $\ln(a^n) = n\ln a$
   - $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$
2. La fonction logarithme népérien est définie, continue, dérivable et même de classe $\mathscr{C}^1$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\forall x > 0, \quad \ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$
   $\forall x > 0, \quad$ si $f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
   la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
4. $a = \ln 256 = 8\ln 2$ $\qquad b = \ln\frac{1}{4} = -2\ln 2$ $\qquad c = -9\ln 2 - 4\ln 5$
   $d = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ldots + \ln 498 - \ln 499 + \ln 499 - \ln 500 = -\ln(500) = -\ln(5\times 10^2) = -\ln(2^2\times 5^3) = -2\ln 2 - 3\ln 5$

   $A(x) = \ln\left(x^2+1\right) - 2\ln x = \ln\left(x^2+1\right) - \ln x^2 = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ $\qquad B(x) = \ln\left(\sqrt{e^x}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^x) = \frac{x}{2}$
   $C(x) = e^{5\ln x} = x^5$ $\qquad D(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{e^x}} = -\ln\sqrt{e^x} = -\frac{1}{2}\ln(e^x) = -\frac{x}{2}$ $\qquad E(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + \ln(x^2) = -3\ln x + 2\ln x = -\ln x$
5. Correction en visionnant cette vidéo de la chaine d'Olivier Geneste.

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Un système de Cramer est un système linéaire ayant autant d'équations que d'inconnues **et** admettant une unique solution (la solution étant un couple, un triplet, ou un $n-$uplet selon le nombre d'équations et d'inconnues).
2. La solution d'un système de Cramer homogène est le $n-$uplet nul.
3. Un système est de Cramer si et seulement si sa matrice est inversible.
4. Lorsque le système n'est pas de Cramer, il peut y avoir une infinité de solution ou pas de solution si les seconds membres ne sont pas compatibles.

✎ Exercice 2 (Application)

1. **a.**

$$\begin{cases} a-2b+c=8 \\ 2a+b-c=-3 \\ -a+b+2c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=8 \\ -5b+3c=19 \\ -b+3c=11 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=8 \\ -5b+3c=19 \\ -12c=-36 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases} \qquad \text{par remontées successives}$$

b.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 0=0 \\ -2y=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$$

ce système n'est pas de Cramer,
il a une infinité de solutions

On a réussi à exprimer tous les triplets solutions (x,y,z) en fonction du paramètre z :
Pour chaque $z \in \mathbb{R}$, on obtient un triplet solution $(-z,0,z)$ à ce système.
Donnons quelques exemples de solutions : $(-2,0,2)$, $\left(\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)$, $(\pi,0,-\pi)$, etc.

c. Réponse brute : $(0,0,0)$. Il s'agit d'un système de Cramer.

d.

$$\begin{cases} x-\ \ y+\ \ z=0 \\ -2x+2y-2z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z\ \ =0 \\ \qquad\quad 0=0 \\ \qquad\quad 0=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1+L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_1-L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=x+z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=x+z \\ z=z \end{cases}$$

ce système n'est pas de Cramer, il a une infinité de solutions

On a réussi à exprimer tous les triplets solutions (x,y,z) en fonction des paramètres x et z :
Pour chaque couple $(x,z) \in \mathbb{R}^2$, on obtient un triplet $(x,\ x+z,\ z)$ solution à ce système.

Remarque : On aurait pu faire un autre choix de paramètres :

- les triplets $(y-z,\ y,\ z)$ sont aussi solutions de ce système pour tout couple $(y,z) \in \mathbb{R}^2$.
- les triplets $(x,\ y,\ y-x)$ sont aussi solutions de ce système pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. **a.** On remarque facilement que $x=y=z$ et que les triplets solutions sont les triplets (x,x,x) avec $x \in \mathbb{R}$.

b. On trouve $(0,0,0)$ comme unique solution.

c.

$$\begin{cases} 2x-\ \ y-\ \ z=0 \\ -x+2y-\ \ z=0 \\ 3x\qquad\ -3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ 2y-2z=0 \\ \qquad\ x=z \end{cases}$$

en substituant x à z dans L_1 et L_2 grâce à la relation trouvée dans L_3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ x=z \end{cases}$$

Les solutions sont donc les (z,z,z) avec $z \in \mathbb{R}$.
Le système n'est pas de Cramer.

$$\begin{cases} -3x+\quad y\qquad\ =0 \\ \qquad -\ 3y+\ \ z=0 \\ \ \ 6x-11y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} y=3x \\ z=3y \\ 0x=0 \end{cases}}_{\downarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ z=9x \end{cases}$$

(la dernière ligne est obtenue en remplaçant les y par des $3x$ mais aussi les z par des $3y$ qui sont donc égaux à $9x$)
Les solutions sont donc les triplets $(x,3x,9x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

Réponses brutes :

1. $(3,2,0)$ (système de Cramer)
2. $(-1,-1,1)$ (système de Cramer)
3. $(0,0,0)$ (système de Cramer)
4. les $(0,z,z)$ pour $z \in \mathbb{R}$ sont solution (système pas de Cramer)

6. Session 6

✎ Calculs

$2A = \begin{pmatrix} 2&4&6 \\ 0&4&2 \\ 2&0&2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $CA = \begin{pmatrix} -1&0&0 \end{pmatrix}$, $A-3I_3 = \begin{pmatrix} -2&2&3 \\ 0&-1&1 \\ 1&0&-2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 4&6&8 \\ 1&4&3 \\ 2&2&4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 12&20&26 \\ 4&10&10 \\ 6&8&12 \end{pmatrix}$

$A^3-4A^2+2A = \begin{pmatrix} -2&0&0 \\ 0&-2&0 \\ 0&0&-2 \end{pmatrix} = -2I_3$, $D^2 = \begin{pmatrix} 4&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 8&0&0 \\ 0&-1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 2&-2&-4 \\ 0&0&0 \\ 1&-1&-2 \end{pmatrix}$ $CB = (0)$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Dire qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible signifie qu'il existe une matrice B de de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$.
Dans ce cas, on a également $BA = I_n$ et la matrice B est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

✎ Exercice 2 (Application)

Il y a bien 5 méthodes pour trouver l'inverse d'une matrice (nous reverrons la dernière dans la session 17). La méthode de Gauss-Jordan n'est à entreprendre que si les autres ont été mises en défaut. Ce n'est pas celle-ci à envisager en premier.

1. A est inversible car $\det(A) = 1\times(-1) - 3\times 0 = -1 \neq 0$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}-1&0\\-3&1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-1&0\\-3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\3&-1\end{pmatrix} = A$
2. On utilise la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{lll}
\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-2\\1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-3\\0&-1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array} \\
\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-3\\0&0&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix} & L_3\leftarrow 2L_3-L_2 \\
\begin{pmatrix}3&3&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4&1&-2\\-2&0&2\\-1&-1&2\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_1\leftarrow 3L_1-L_3\\L_2\leftarrow L_2+L_3\end{array} \quad \text{(la matrice obtenue étant triangulaire sans 0 sur la diagonale, on sait déjà que } A \text{ est inversible)} \\
\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&2&2\\-2&0&2\\-1&-1&2\end{pmatrix} & L_1\leftarrow 2L_1+3L_3 \\
\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac13&\frac13&\frac13\\1&0&-1\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_1\leftarrow \frac16 L_1\\L_2\leftarrow -\frac12 L_2\\L_3\leftarrow \frac13 L_3\end{array}
\end{array}$$

   Donc $A^{-1} = \frac13\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&-3\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

3. $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}3&0&0\\4&-1&-2\\4&-4&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3&0&0\\4&-1&-2\\4&-4&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}\end{array}$ donc $A^2 = 9I$ c'est à dire que $A\times\left(\frac19 A\right) = I$. $\qquad$ on en déduit : $A^{-1} = \frac19 A = \frac19\begin{pmatrix}3&0&0\\4&-1&-2\\4&-4&1\end{pmatrix}$
4. $A = \mathrm{diag}\left(2,-1,\frac12\right)$ étant diagonale, $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac12,\frac{1}{-1},\frac{1}{\frac12}\right) = \mathrm{diag}\left(\frac12,-1,2\right) = \begin{pmatrix}0{,}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1.

$$\begin{aligned}
A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0\\
&\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \neq 0\\
&\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 \neq 0\\
&\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-4) \neq 0\\
&\Leftrightarrow \lambda \neq -1 \text{ et } \lambda \neq 4
\end{aligned}$$

2. En utilisant la même méthode, on tombe sur un trinôme en λ ayant un discriminant strictement négatif, il est donc impossible qu'il s'annule et la matrice A est inversible pour toute valeur λ réelle.
3. La matrice A étant diagonale, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
   A est donc inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{2,-2\}$.
4. La matrice A étant triangulaire, elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
   Après l'étude de la nullité de ses coefficients diagonaux, on trouve que A est inversible si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}$.

7. Session 7

✎ Calculs

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!}$ $\quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \quad \binom{n}{n} = 1 \quad (n+1)n! = (n+1)! \quad \dfrac{n!}{n} = (n-1)! \quad 0! = 1$
2. $A = \frac{10!}{7!} = 10\times 9\times 8 = 720$ $\qquad B = \binom{8}{3} = \frac{8\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{1\times 2\times 3}} = 56$ $\qquad C = \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$
   $D = \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{2\times3\times4\times5} = \dfrac{1}{2\times3\times5} = \dfrac{1}{30}$ $\qquad E = 2\times4\times6\times\cdots\times(2n) = (2\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\cdots\times(2\times n) = 2^n\times n!$
   $F = k\binom{n}{k} - n\binom{n-1}{k-1} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} - n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} = \frac{\cancel{k}\times n!}{\cancel{k}(k-1)!(n-k)!} - \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} - \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = 0$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Lorsque l'on dénombre des combinaisons (tirages sans ordre et sans remise, cf méthode 1.4) ou lorsque l'on doit choisir un nombre d'emplacements parmi des emplacements disponibles (méthode 1.5)

2. Une $p-$liste d'un ensemble à n éléments E est un élément de E^p. Cela correspond à un tirage avec ordre et avec remise. Il y en a n^p (méthode 1.1)
3. Une permutation d'un ensemble à n éléments est une $n-$liste d'éléments **distincts** de E. Il y en a $n!$ (méthode 1.2)

✎ Exercice 2 (Application)

1. **a.** Il s'agit d'une 5−liste de $[\![0,9]\!]^4\times\{A,B\}$. Il y a donc $10^4\times 2=20000$ tels codes.

   b. Cela revient à taper un code à deux chiffres. il y a $10\times 10=100$ codes possibles. Etant dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de taper le bon code est de $\frac{1}{100}=0,01$

2. **a.** Il y a une seule manière de choisir la dame de coeur et $\binom{31}{4}$ manières de choisir les 4 autres cartes de la main. Le nombre de telles mains est donc : $\binom{31}{4}=\frac{31\times30\times29\times28}{1\times2\times3\times4}=31\times5\times29\times7$
   Comme on aime le calcul, on continue : $31\times29=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=900-1=899$ $\qquad 5\times7=35$
   $35\times899=35(900-1)=35\times900-35=35\times3\times300-35=105\times300-35=31500-35=31465$
   Il y a donc 31465 mains de 5 cartes contenant la dame de cœur dans un jeu de 32 cartes.

   b. Dans le jeu, il y a en tous $\binom{32}{5}$ mains de 5 cartes.
   Etant dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'avoir une main contenant la reine de cœur est :
   $\dfrac{\frac{31\times30\times29\times28}{1\times2\times3\times4}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{1\times2\times3\times4\times5}}=\frac{31\times30\times29\times28}{1\times2\times3\times4}\times\frac{1\times2\times3\times4\times5}{32\times31\times30\times29\times28}=\frac{5}{32}$

3. Il y a $\binom{2}{4}$ manières de choisir les deux as.
   Il y a $\binom{3}{28}$ manières de choisir les trois autres cartes.
   Il y a donc en tout $\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}$ manières de choisir une telle main.
   Or $\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}=\frac{4\times3}{2}\times\frac{28\times27\times26}{1\times2\times3}=6\times14\times9\times26$
4. Il est plus aisé de compter les mains ne contenant aucun as.
   Il y a en a $\binom{28}{5}$. Puisqu'en tout il y a $\binom{32}{5}$ mains dans le jeu, il y en a $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}$ qui ne contiennent aucun as.
5. Répondre qu'il y a $\binom{5}{3}$ possibilités serait trop simpliste. En effet, la place du conducteur doit être occupée par une personne !
   Dans une voiture de cinq places qui doit faire un trajet, on doit tout d'abord attribuer la place du conducteur. Dans notre exemple, nous avons 3 manières de l'attribuer. Reste ensuite à placer les 2 autres personnes sur les 4 places vacantes dans le véhicule : il y a alors $\binom{4}{2}$ manière de les placer.
   Au final, il y a $3\times\frac{4\times3}{2}=18$ manières de placer les 3 personnes dans la voiture.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour le fun)

Les pièces doivent être classées en catégories :

- Les pièces unicolores : il y en a 4
- Les pièces bicolores :
  - Les pièces bicolores ayant 2 couleurs de chaque :
    Il y en a autant que de choix de deux couleur (sans ordre et sans remise) il y en a donc $\binom{4}{2}=6$
  - Les pièces bicolores ayant une couleur représentée 3 fois et l'autre couleur représentée 1 fois :
    Contrairement à la situation précédente, les deux couleurs ne jouent pas des rôles symétriques et il y a une première couleur à choisir pour la couleur représentée 3 fois (avec un choix de 4 possibilités) puis un deuxième choix à opérer pour la couleur représentée 1 fois (il reste alors 3 possibilités de couleurs). Au final, il y a $4\times2=12$ pièces différentes.
- Les pièces tricolores : On a besoin de choisir tout d'abord la couleur qui sera représentée deux fois sur la pièce et on a un choix de 4 couleurs pour cela. Ensuite, les deux autres couleurs sont choisies avec un tirage sans ordre et sans remise parmi les 3 couleurs restantes. Le nombre de telles pièces est donc de $4\times\binom{3}{2}=4\times3=12$
- Les pièces quadricolores : il n'y en a qu'une

Au total, on a donc 4+6+12+12+1=35 pièces.
Le plateau est donc un plateau de 6 cases par 6.

✎ Exercice 5 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. La formule du triangle de Pascal donne
$$\binom{j-1}{k-1}+\binom{j-1}{k}=\binom{j}{k}$$
2. Il y a deux rédactions possibles pour cette question :
   - Par récurrence sur i :
     $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall i\geq k+1$, Posons HR_i : $\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1}=\binom{i-1}{k}$

Initialisation Pour $i = k+1$

$$\sum_{j=k}^{k} \binom{j-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$$

donc HR_{k+1} est vraie.

Hérédité Soit $i \geq k+1$, supposons alors que HR_i est vraie. Montrons que HR_{i+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k-1} \\
&= \binom{i-1}{k} + \binom{j-1}{k-1} && \text{(Par } HR_i\text{)} \\
&= \binom{i}{k} && \text{(par le triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

donc HR_{i+1} est vraie.

Conclusion Donc $\forall i \geq k+1$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$

- Par calcul direct :
  Ayant prouvé que $\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$ pour tous j et k naturels non nuls, on en déduit que $\binom{j-1}{k-1} = \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}$ et par suite que $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k} \\
&= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j'=k-1}^{i-2} \binom{j'}{k} && \text{chgt d'indice } j' = j-1 \\
&= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} && \text{par télescopage} \\
&= \binom{i-1}{k} && \text{car } k-1 < k
\end{aligned}$$

A noter que cette égalité est démontrée d'une autre manière dans cette vidéo (les indices ne sont pas tout à fait les mêmes mais il s'agit bien de la même relation, elle tombe parfois aux concours avec des indices variés)

8. Session 8

✎ Calculs

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha = (n+1)\alpha$ $\quad\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \underset{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ interversion avec indices dépendants : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \underset{(1\leq i\leq j\leq n)}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

2. $\displaystyle A = \sum_{k=2}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right) - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2+3n+2-2}{2} = \frac{n^2+3n}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$

$\displaystyle B = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k(k-1) = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 - k = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)\left[(2n+1)-3\right]}{12}$

$\displaystyle B = \frac{n(n+1)(2n-2)}{12} = \frac{2n(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$ *(on pourra remarquer au passage qu'ils s'agit de $\binom{n+1}{3}$)*

$\displaystyle C = \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3\frac{1-3^{n-1}}{1-3} = \frac{3-3^n}{-2} = \tfrac{1}{2}(3^n - 3)$

$\displaystyle D = \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n+1-k} = 5^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2}{5}\right)^k = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{\frac{3}{5}} = \tfrac{5}{3}\left(5^{n+1}-2^{n+1}\right)$

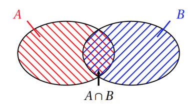
$\displaystyle E = \sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^3 \underset{i=j-2}{=} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$F=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}k \underset{1\leq k\leq i\leq n}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)\left[(2n+1)+3\right]}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

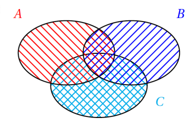
(on reconnaîtra qu'il s'agit de $\binom{n+2}{3}$)

✎ Exercice 1 (Cours)

1. On peut calculer la probabilité d'une intersection
   - grâce à la formule des probabilités composées : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}_{A_1}(A_2)\cdot\mathrm{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$
   - ou, si tous les événements qui composent l'intersection sont mutuellement indépendants. Dans ce cas, $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)$
2. On peut calculer la probabilité d'une réunion
   - grâce à la formule du crible :
     - cas d'une réuion de deux événements : $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$



     - cas d'une réuion de trois événements : $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$



   - ou, si tous les événements qui composent la réunion sont deux à deux incompatibles. Dans ce cas, $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A_i)$

✎ Exercice 2 (Application)

Dans tout l'exercice, on note V_i l'événement "tirer une boule verte au $i-$ième tirage", pour tout $i\in[\![1,3]\!]$.

1. **a.** A est réalisé si et seulement si le joueur tombe sur une boule rouge à chacun des trois tirages.
   Cela signifie que
   $$A=\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\cap\overline{V_3}$$
   Grâce à la formule des probabilités composées, et au fait que chaqu tirage est réalisé en conditions d'équiprobabilité, on en déduit que :
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}\left(\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\cap\overline{V_3}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\overline{V_1}\right)\mathrm{P}_{\overline{V_1}}\left(\overline{V_2}\right)\mathrm{P}_{\overline{V_1}\cap\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right)\\&=\tfrac{n}{n+1}\times\tfrac{n-1}{n}\times\tfrac{n-2}{n-1}\\&=\tfrac{n-2}{n+1}\end{aligned}$$

   b. B est réalisé si et seulement au deuxième tirage ou si elle est tirée au troisième tirage.
   $$B=\left(\overline{V_1}\cap V_2\cap\overline{V_3}\right)\cup\left(\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\cap V_3\right)$$
   Puisque l'on ne peut de toutes façons tirer que des boules rouges après avoir tiré la boule verte, on simplifie en :
   $$B=\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)\cup\left(\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\cap V_3\right)$$
   Par incompatibilité de la réunion, on en déduit :
   $$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)+\mathrm{P}\left(\overline{V_1}\cap\overline{V_2}\cap V_3\right)$$
   Puis, on utilise la formule des probabilités composées comme dans l'item précédent pour finir le calcul :
   $$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\tfrac{n}{n+1}\times\tfrac{1}{n}\;+\;\tfrac{n}{n+1}\times\tfrac{n-1}{n}\times\tfrac{1}{n-1}\\&=\tfrac{1}{n+1}\;+\;\tfrac{1}{n+1}\\&=\tfrac{2}{n+1}\end{aligned}$$

   c. Les tirages étant sans remise, on ne peut que :
   - tirer la boule verte au premier tirage
   - OU la tirer au deuxième ou au troisième tirage
   - OU ne pas la tirer du tout

Ces événements étant incompatibles, il forment un système complet d'événements.
Autrement dit, $\{A, B, C\}$ forme un système complet d'événements et on en déduit que

$$\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) = 1 - \frac{n-2}{n+1} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+1-(n-2)-2}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Rque : Ce résultat aurait évidemment pu être obtenu par calcul direct grâce à la formule des probabilités composées, mais la mention "en déduire" dans l'énoncé imposait cette méthode.

2. Tout d'abord : $D = \left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3\right)$. Puisque les tirages ont lieu avec remise, on a, par indépendance :

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}\left(\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \cap V_3\right) = \mathrm{P}\left(\overline{V_1}\right)\mathrm{P}\left(\overline{V_2}\right)\mathrm{P}(V_3) = \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^3}$$

9. Session 9

✎ Calculs

1. Règles calculatoires sur les racines : pour tout x et y éléments de $\mathbb{R}_+^*$

- $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
- $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{x^n} = \left(\sqrt{x}\right)^n$
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
- $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$
- $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

- $\sqrt{0} = 0$

Pour tout x réel :
- $\sqrt{x^2} = |x|$

2. $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$B = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \dfrac{2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$C = \sqrt{2^2 \times 3^3 \times 5^5} = 2 \times 3\sqrt{3} \times 5^2\sqrt{5} = 150\sqrt{15}$

$D = \left(\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^4 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times 5 = 20$

$E = (4+\sqrt{11})^2 - (4-\sqrt{11})^2 = \left[(4+\sqrt{11}) - (4-\sqrt{11})\right]\left[(4+\sqrt{11}) + (4-\sqrt{11})\right] = 2\sqrt{11} \times 8 = 16\sqrt{11}$

$F = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}} = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{3+1}}}} = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+2}}} = \sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \sqrt{6+\sqrt{7+2}}$

$F = \sqrt{6+\sqrt{9}} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. On applique le théorème de la bijection.

✎ Exercice 2 (Application)

1. g est dérivable sur $[1; +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
$\forall x \geq 1, \quad g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ *(on garde le réflexe de factoriser la dérivée lorsque l'on en cherche le signe !)*
$\forall x \geq 1, \quad g'(x)$ est du même signe que $1-x$, c'est à dire négatif. On en déduit le tableau suivant :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	$1/e$	$\searrow$	0

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées.

g est donc continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, avec $g(1) = \frac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

g réalise donc une bijection de $[1; +\infty[$ sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$.
Sa bijection réciproque g^{-1} est donc une bijection décroissante de $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ dans $[1; +\infty[$ et on a le tableau de variations suivant :

x	0		$1/e$
$g^{-1}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

2. **a.** f est dérivable sur $]0; +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles ($x \neq 0$).

$\forall x > 0, \quad g'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x)}{x^2} = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$

Sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du même signe que $\ln x - 2$.
Or, $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} \ln x - 2 > 0 &\Leftrightarrow \ln x > 2 \\ &\Leftrightarrow x > e^2 \qquad \text{par croissance de la fonction exponentielle} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ par opérations sur les limites

$g(e^2) = \dfrac{1-\ln(e^2)}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$ par croissances comparées

Puisque f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction dérivable sur cet intervalle, et puisqu'elle est strictement décroissante sur $]0,e^2[$ et strictement croissante sur $]e^2,+\infty[$, on en déduit que f réalise une bijection de $]0,e^2[$ sur $]-1/e^2,+\infty[$ et de $]e^2,+\infty[$ sur $]-1/e^2,0[$.

b.
- Etude sur $]e^2,+\infty[$:

  Sachant que $2 \le e \le 3$, on a $4 \le e^2 \le 9 \le 10$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$
  puis $\frac{1}{4} \ge \frac{1}{e^2} \ge \frac{1}{9} \ge \frac{1}{10}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$
  et enfin $-\frac{1}{4} \le -\frac{1}{e^2} \le -\frac{1}{9} \le -\frac{1}{10} < 0$

  donc $-\frac{1}{10} \in]-1/e^2,0[$ et puisque f réalise une bijection de $]e^2,+\infty[$ sur $]-1/e^2,0[$, on en déduit que l'équation $f(x) = -\frac{1}{10}$ admet exactement une solution sur $]e^2,+\infty[$.
- Etude sur $]0,e^2[$:
  $-\frac{1}{10} \in]-1/e^2,+\infty[$ et puisque f réalise une bijection de $]0,e^2[$ sur $]-1/e^2,+\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x) = -\frac{1}{10}$ admet exactement une solution sur $]0,e^2[$.
- $f(e^2) = -\frac{1}{e^2} \ne -\frac{1}{10}$ donc e^2 n'est pas une solution de l'équation $f(x) = -\frac{1}{10}$.
- On en conclut que l'équation $f(x) = -\frac{1}{10}$ admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.

c. $\frac{1}{n} \in]-1/e^2,+\infty[$ et puisque f réalise une bijection de $]0,e^2[$ sur $]-1/e^2,+\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet exactement une solution sur $]0,e^2[$, que l'on notera α_n.

d. $f(1) = \frac{1-\ln 1}{1} = 1 \ge \frac{1}{n}$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$.
$f(e) = \frac{1-\ln e}{e} = 0 \le \frac{1}{n}$
Donc $f(1) \ge \frac{1}{n} \ge f(e)$ et puisque f est une bijection strictement décroissante, on en déduit que $1 \le \alpha_n \le e$.

e. La question c. signifie que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. On en déduit que $\alpha_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Pour tout entier naturel n non nul, $0 < \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$
Par décroissance de f^{-1} sur $]0,+\infty[$ $f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \ge f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$
C'est-à-dire (d'après q.2.e) $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$
On en déduit que la suite (α_n) est croissante.
Puisque l'on a vu en question 2.d qu'elle est majorée par e, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Mais puisque f^{-1} est continue sur $]-1/e^2;+\infty[$ comme bijection réciproque de f continue de $]0,e^2[$ dans $]-1/e^2;+\infty[$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{(f^{-1}\mathscr{C}^0\text{en}0)}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(0) = e$ (en effet, $f(e) = 0$ d'après 2.d)
Pour conclure, (α_n) converge vers e.

10. Session 10

✎ Calculs

$a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2 - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$

$b_n = 2^{2n} \times 3^{-n}$

$c_n = 4^{n+1} - 2^{2n-3} = 4 \cdot 4^n - 2^{2n} \cdot 2^{-3} = 4 \cdot 4^n - \frac{1}{8} \cdot 4^n = \left(4 - \frac{1}{8}\right)4^n = \frac{31}{8} \cdot 4^n$

$d_n = (-1)^{n+1} 2^{2-3n} = -(-1)^n \times 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^n = -4\left(-\frac{1}{8}\right)^n$

$e_n = \frac{6^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{6}\frac{6^n}{3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{3}\right)^n = \frac{1}{6} \cdot 2^n$

$f_n = \dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}} = \cdots = 12 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$

✎ **Exercice 1 (Cours)**

1. **a.** Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

   b. On commence par déterminer c tel $c = ac + b$ puis on étudie la suite auxiliaire $v_n = u_n - c$.

2. **a.** Il s'agit d'une suite réccurente linéaire d'ordre 2.

   b. On commence par résoudre l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$

✎ **Exercice 2 (Application)**

1. Réponse brute : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$
2. Réponse brute : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$

✎ **Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)**

1. Réponses brutes : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3n - 2 \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k = 143$
2. Réponses brutes : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{255}{256}$

✎ **Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)**

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n + 2 - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2 = v_n + 2$ donc (v_n) est arithmétique de raison 2.
2. Puisque $v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 + 2n$
3. • D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= n + 2\frac{(n-1)n}{2} \\
&= n + n^2 - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

   • D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k && \text{en réindexant la première somme} \\
&= u_n - u_0 && \text{par télescopage} \\
&= u_n - 1
\end{aligned}$$

   • Des deux expressions obtenues en question précédente, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - 1 = n^2$
   C'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + n^2$. On constate que l'égalité reste vraie pour $n = 0$.
   On en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + n^2$

11. Session 11

✎ **Calculs**

$a(x) = (x-2)(3x+5) - 2(2x-1)(x-2) = (x-2)\left[(3x+5) - 2(2x-1)\right] = (x-2)(-x+7)$

On reconnait une identité remarquable : $b(x) = (x-3)^2$

$c(x) = (2x-1)(2x+1) + (x-3)(2x+1) = (2x+1)\left[(2x-1) + (x-3)\right] = (2x+1)(3x-4)$

Attention, on demande bien de factoriser ! $d(x) = \left[(x-1) - 2\right]\left[(x-1) + 2\right] = (x-3)(x+1)$

$e(x) = \left[(3x-5) - (x-7)\right]\left[(3x-5) + (x-7)\right] = (2x+2)(4x-12) = 8(x+1)(x-3)$

$f(x) = 3(x-2) + (x+1)(x-2) = (x-2)(3+x+1) = (x-2)(x+4)$

$g(x) = (x-7)(x+7) + 3x(x-7) = (x-7)(x+7+3x) = (x-7)(4x+7)$

$h(x) = (5x+2)(3x-7+1) = (5x+3)(3x-6) = 3(5x+3)(x-2)$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Ce sont les matrices diagonales.

✎ Exercice 2 (Application)

1. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5u_n+3v_n \\ 6u_n-2v_n \end{pmatrix}$
2. En posant $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, et en calculant le produit AX_n, on obtient bien X_{n+1}.
3. C'est une démonstration par récurrence que l'on retrouve dans la méthode 2.9 du chapitre 5 du cours de M. Brossard.
4. $\det(P) = -3$ donc P est inversible et $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$
donc $PDP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -15 & 9 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = A$
5. On montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.
C'est une démonstration par récurrence que l'on retrouve dans la méthode 2.8 du chapitre 5 du cours de M. Brossard.
6. D étant diagonale, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix}$.
En utilisant le résultat des deux questions précédentes, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
Or
$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & (-8)^n \\ 2 & -(-8)^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1+2(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2-2(-8)^n & 2+(-8)^n \end{pmatrix} \end{array}$$
Donc $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2-2(-8)^n & 2+(-8)^n \end{pmatrix}$
7. D'après l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc d'après la question 3, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2-2(-8)^n & 2+(-8)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2(-8)^n+1-(-8)^n \\ 2-2(-8)^n+2+(-8)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-8)^n \\ 4-(-8)^n \end{pmatrix}$
8. Pour finir, puisque $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on en déduit les expressions explicites des termes généraux des suites (u_n) et (v_n) :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3}\left(2+(-8)^n\right) \quad$ et $\quad v_n = \frac{1}{3}\left(4-(-8)^n\right)$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Pistes de résolution et réponses partielles :

- On commence par traduire la relation de récurrence en un système : $\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & & u_{n+1} & \\ u_{n+2} & = & & & u_{n+2} \\ u_{n+3} & = & -6u_n & +5u_{n+1} & +2u_{n+2} \end{array}\right.$
- On procède comme dans les questions 1. à 3. de l'exercice précédent (si ce n'est que le rôle de X_n est joué par U_n).
La matrice A sera ici la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- Pour la question 4, on détermine $D = P^{-1}AP$ (on doit tomber sur la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$)
- Question 5 inchangée.
- Pour la question 6., on explicite D^n, mais il est inutile (et trop compliqué) d'expliciter les 9 coefficients de la matrice A^n.
- On détermine U_0 et on comprend pourquoi le calcul matriciel $(1\ 0\ 0)\,P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ permet d'obtenir u_n pour tout entier naturel n.
Il ne reste plus qu'à calculer astucieusement, en confondant réel et matrice 1x1 :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{30}(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\left(1\ (-2)^n\ 3^n\right)\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\left(-5+2(-2)^n+3\cdot 3^n\right) \\ &= \frac{1}{30}\left(-5-(-2)^{n+1}+3^{n+1}\right) \end{aligned}$$

12. Session 12

✎ Calculs

1. Un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines.
2. $A(x) = x(x+4)$ *(peut se faire de tête :* $A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ *ou* $x+4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ *ou* $x = -4$*)* a pour racines 0 et -4.
$B(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ a pour racines $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.
$C(x) = -x^2-9$ est la somme d'un nombre négatif et d'un nombre strictement négatif, il ne s'annule donc jamais et n'a pas de racines.

Dans les deux dernières questions, avant de commencer à répondre à la question posée, on doit évidemment trouver les éventuelles racines des trinômes. On a le choix entre calculer le discriminant et en déduire les racines ou "voir" qu'il y a une racine évidente et en déduire la deuxième grâce aux relations coefficients/racines. Lorsque cela est possible, c'est cette seconde méthode qui sera privilégiée puisque je sais que vous êtes moins coutumiers de son utilisation et que cela permet de s'entraîner là-dessus.

3.
- 1 est racine évidente et l'autre racine α vérifie $1\times\alpha=-4$ *(rappel : le produit des racines d'un trinôme vaut $\frac{c}{a}$)* donc $D(x)$ a pour racines 1 et -4. Le coefficient dominant de ce trinôme étant positif, d'après la règle rappelée en question 1, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\Delta=1>0$ les racines de $E(x)$ sont $x_1=\frac{7+1}{2}=4$ et $x_2=\frac{7-1}{2}=3$ et le coefficient dominant de $E(x)$ étant positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$E(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\Delta=-39<0$ donc le trinôme est du signe de son coefficient dominant -2, donc $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)<0$.

4.
- 1 est racine évidente de $G(x)$ donc la seconde racine α vérifie $1\times\alpha=-\frac{5}{2}$. On a donc :
$G(x)=-2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)=(1-x)(2x+5)$ *(on a développé le "-" dans la première parenthèse et le 2 dans la seconde)*
- -1 est racine évidente de $H(x)$ donc la seconde racine α vérifie $-1\alpha=-2$. Donc $H(x)$ a pour racines -1 et 2.
$H(x)=-(x+1)(x-2)=(x+1)(2-x)$
- -1 est racine évidente de $J(x)$ donc la seconde racine α vérifie $-\alpha=-\frac{1}{3}$ donc $J(x)$ a pour racines -1 et $\frac{1}{3}$.
$J(x)=-3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x+1)(1-3x)$

✎ Exercice 1 (Cours)

Formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$:

$P(B)=\sum_{i\in I}\mathrm{P}(B\cap A_i)=\sum_{i\in I}\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}_{A_i}(B)$ condition pour la deuxième formule : $\forall i\in I,\ \mathrm{P}(A_i)\neq 0$

✎ Exercice 2 (Application)

Le corrigé est disponible en cherchant l'exercice 6 de cette page.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

On note A l'événement "la balle a été fabriquée par la machine A", B l'événement...blablabla
On note D l'événement "la balle présente un défaut".
D'après les données de l'énoncé, on sait que la machine C produit $\frac{5}{12}$ des balles. D'après la formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\{A,B,C\}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D)&=\mathrm{P}(D\cap A)+\mathrm{P}(D\cap B)+\mathrm{P}(D\cap C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}_A(D)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}_B(D)+\mathrm{P}(C)\mathrm{P}_C(D)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{12}{100}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{100}+\frac{5}{12}\times\frac{10}{100}\\&=\frac{48+27+50}{1200}=\frac{125}{1200}=\frac{5}{48}\end{aligned}$$

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

et sa correction.

13. Session 13

✎ Calculs

1.

$$\begin{aligned}\alpha \text{ est racine de } P &\Leftrightarrow P(\alpha)=0\\&\Leftrightarrow \text{il existe un polynôme Q de degré } n-1 \text{ tel que } \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=(x-\alpha)Q(x)\end{aligned}$$

2. $-1+2+5-6=0$ donc -1 est racine du polynôme P.

a. On pose la division euclidienne de x^3+2x^2-5x-6 par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3+x^2) & x^2+x-6 \\ \cline{1-1} x^2-5x & \\ -(x^2+x) & \\ \cline{1-1} -6x-6 & \\ -(-6x-6) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b. Pour tout x réel, on développe : $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$

(Cette dernière étape est primordiale : quand on travaille avec des polynômes, on ordonne toujours les termes et rassemblant et ordonnant selon les puissances décroissantes de x.)

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(ax^2+bx+c) &\Leftrightarrow x^3+2x^2-5x-6 = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \\ b+c=-5 \\ c=6 \end{cases} \qquad \text{par identification} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-6 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on trouve que $x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(x^2+x-6)$

Après une étude (facile) du trinôme (x^2+x-6), on trouve : $x^3+2x^2-5x-6 = (x+1)(x-2)(x+3)$

3. Cette question est archi classique et tombe régulièrement aux concours, il faut donc savoir la traiter avec soin.

(On commence par mettre au même dénominateur l'expression de droite :)

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, $\quad \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \dfrac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$

(Là encore, on arrête pas le calcul avant d'avoir tout rassemblé au numérateur (les x avec les x), c'est un polynôme qui doit s'ordonné comme expliqué en rouge plus haut !)

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)} \\ &\Leftrightarrow 1 = (a+b)x+a \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \text{par identification} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$, $\quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

✎ Exercice 1 (Cours)

1.
- Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto \lambda e^{-at}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- **Une** solution de l'équation différentielle $y'+ay=c$ est donnée par $t \mapsto \frac{c}{a}$
- Les solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
  - $t \mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ lorsque l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2
  - $t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{r_0 t}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ lorsque l'équation caractéristique admet une solution réelle double r_0
- **Une** solution de l'équation différentielle $y''+ay'+by=c$ est donnée par $t \mapsto \frac{c}{b}$

2. $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto ae^{ax}$ *(fonctionne d'ailleurs aussi pour $a=0$)*

3. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t)+3f(t) = 5e^t$.

✎ Exercice 2 (Application)

1. $y'+2y=2$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:
- l'ensemble des solutions de $y'+2y=0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$
- Une solution particulière de $y'+2y=2$ est $x \mapsto 1$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'+2y=2$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x}+1, \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. $y'-2y=x^2$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x) = ax^2+bx+c$)* :
- l'ensemble des solutions de $y'-2y=0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

- Une solution particulière de $y'-2y=x^2$: Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$. Posons $f: x\mapsto ax^2+bx+c$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } y'-2y=x^2 &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 2ax+b-2(ax^2+bx+c)=x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -2ax^2+(2a-2b)x-2c+b=x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a=1 \\ 2a-2b=0 \\ b-2c=0 \end{cases} \qquad \text{par identification} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

  Ainsi, $x\mapsto -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est une solution particulière de $y'-2y=x^2$

  Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'-2y=x^2$ est $\{x\mapsto \lambda e^{2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}, \lambda\in\mathbb{R}\}$

3. $y'-2y=e^{4x}$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x)=(ax+b)e^{4x}$)* :
   - l'ensemble des solutions de $y'-2y=0$ est $\{x\mapsto \lambda e^{2x}, \lambda\in\mathbb{R}\}$
   - Une solution particulière de $y'-2y=e^{4x}$ est $x\mapsto xe^{4x}$ (on raisonne comme dans la question précédente et on ne trouve aucune condition particulière que doit vérifier b, autant prendre donc la valeur de b la plus simple possible, 0 par exemple)

   Conclusion : l'ensemble des solutions de est $\{x\mapsto \lambda e^{2x}+e^{4x}, \lambda\in\mathbb{R}\}$
4. $y''+y'-2y=4$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. :
   - l'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=0$ est $\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{-2x}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$
     (rédaction sans difficulté laissée au lecteur, on commence bien sûr par étudier l'équation caractéristique associée)
   - Une solution particulière de $y''+y'-2y=4$ est $x\mapsto -2$

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''+y'-2y=4$ est $\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{-2x}-2, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$
5. $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$, d'inconnue y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. *(on cherchera une solution particulière de la forme $f_p(x)=(ax+b)e^{-x}$)* :
   - l'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=0$ est $\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{3x}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$ (rédaction laissée au lecteur)
   - Une solution particulière de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$ est $x\mapsto \left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}$ (rédaction similaire à celle des items 2 et 3, à savoir faire correctement au besoin aller voir sur cette page)

   Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''-4y'+3y=(2x+1)e^{-x}$ est $\{x\mapsto \lambda e^{x}+\mu e^{3x}+\left(\frac{1}{4}x+\frac{5}{16}\right)e^{-x}, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)
Correction sur l'ex 4 de cette page

14. Session 14

✎ Calculs

1. Rappeler les règles calculatoires sur les valeurs absolues : ∘ $|xy|=|x|\cdot|y|$ ∘ $|x^n|=|x|^n$ ∘ $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$
   ∘ Inégalité triangulaire : $|x+y|\leq|x|+|y|$ Rappel : distance entre deux réels x et y : $|x-y|$
   Si c est un réel et $r>0$, ∘ $|x|\geq r \Leftrightarrow x\leq -r$ ou $x\geq r$ ∘ $|x-c|<r \Leftrightarrow c-r<x<c+r$
2. Réponses brutes :
   a. $x=4$ ou $x=8$ **b.** $x=-\frac{11}{2}$ ou $x=-\frac{9}{2}$ **c.** $x=2$ ou $x=3$ **d.** $x\in]6{,}9;7{,}1[$ **e.** $x\leq -2{,}01$ ou $x\geq -1{,}99$ **f.** $\emptyset$

✎ Exercice 1 (Cours)
Le théorème de la limite monotone assure que la suite est convergente. On ne peut pas conclure sur la valeur exacte de la limite mais on peut dire, grâce au prolongement des inégalités, que la limite de la suite est supérieur ou égale à 2.

✎ Exercice 2 (Application)

1. L'étude de la fonction a déjà été faite dans l'item 1 de l'ex 2 de la session 9 sur un autre intervalle. On obtient facilement de même le tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1/e$	↘	0

2. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow xe^{-x} = x \\ &\Leftrightarrow xe^{-x} - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

La seule solution à l'équation $f(x) = x$ est donc $x = 0$

3. **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $HR_n : 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{e} < 1$ donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$ donc HR_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que HR_n est vérifiée, c'est à dire :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$$

f étant croissante sur $[0,1]$, on en déduit

$$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

donc

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{e} \leq 1$$

donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

Donc (u_n) est décroissante et bornée par 0 et 1.

b. La suite étant décroissante et minorée par 0, on en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ qui vérifie $\ell \geq 0$.
Mais puisque (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, qu'elle est convergente et que f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème du point fixe assure que sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. d'après la question 2, (u_n) converge vers 0.

4. **a.** Un raisonnement par récurrence identique à celui mené dans la question 3.a permet de répondre à cette question.

b. Supposons que la suite (u_n) soit convergente vers une limite ℓ finie. Le théorème du point fixe s'appliquerait ici comme dans la question 3.b et (u_n) convergerait vers 0. Cependant, puisque $u_n \leq -1$, le prolongement des inégalités assurerait que $\ell \leq -1$, ce qui est contradictoire avec $\ell = 0$.
La suite (u_n) n'est donc par convergente. Puisqu'elle est tout de même décroissante, on peut conclure grâce au théorème de la limite monotone que (u_n) diverge vers $-\infty$.

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

Nous avons trois points à démontrer pour montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n+(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{n^2}{n(n+1)^2} < 0$ donc (v_n) est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes et elles convergent donc vers le même réel.

15. Session 15

✎ Calculs

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor \leq x \\ x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor \leq x \\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
3. $A = 3$ $B = -7$ $C = \lfloor |-1,25| \rfloor = \lfloor 1,25 \rfloor = 1$ $D = \left| \lfloor -1,25 \rfloor \right| = |-2| = 2$ $E = 3\rfloor - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$
Une petite disjonction de cas s'impose, on s'inspire de E pour le second cas :
   - si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ et
   $F = \lfloor \frac{2p}{2} \rfloor - \frac{2p}{2} = \lfloor p \rfloor - p = p - p = 0$

- si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$ et
$F = \lfloor \frac{2p+1}{2} \rfloor - \frac{2p+1}{2} = \lfloor p + \frac{1}{2} \rfloor - \left(p + \frac{1}{2}\right) = p - p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Remarque : cet exercice est très utile car il peut servir à déterminer avec Python si un entier est pair ou pas : le code `if np.floor(n)-n==0:` permettant de tester si n est pair.

✎ Exercice 1 (Cours)

La propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$,
S'il existe un réel k tel que, pour tout x de $]a,b[$, $|f'(x)| \leq k$
Alors, pour tout couple de réels x_1 et x_2 de $[a,b]$, on a $|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|$

dans la pratique Souvent, on applique ce théorème avec une f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle, qui est une condition plus forte sur f, et qui fonctionne donc a fortiori.
Pour l'étude d'une suite (u_n), définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on s'en sert avec $x_2 = u_n$ et x_1 un point fixe de f, et on doit bien vérifier qu'ils appartiennent tous deux à l'intervalle $[a,b]$ sur lequel on a choisit de travailler.

✎ Exercice 2 (Application)

1. *Si cette question n'a pas été réussie, retravailler la session 9.*
On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} - 1 < 0$
Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ par opérations sur les limites car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ par opérations sur les limites car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$
g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
or $0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = 0$, qui est équivalente à l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on notera α.
On sait aussi que $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g(1) = \frac{1}{2e} - 1 < 0$ puisque $2e > 1$.
Donc $g(0) > 0 > g(1)$ et puisque g est une bijection strictement décroissante, on en déduit que $0 < \alpha < 1$ et par suite on a bien $\alpha \in [0,1]$.
2. Cette propriété se démontre facilement par récurrence. La démonstration est laissée au lecteur.
3. f étant dérivable sur $[0,1]$ par opérations sur les fonctions usuelles, on calcule :
$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$ donc $|f'(x)| = \frac{1}{2}e^{-x}$
$\forall x \in [0,1]$:
$$\begin{array}{rl} 0 \leq x \leq 1 & \\ -1 \leq -x \leq 0 & \text{par décroissance de } x \mapsto -x \\ e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 & \text{par croissance de la fonction exponentielle} \\ \frac{1}{2}e^{-1} \leq \frac{1}{2}e^{-x} \leq \frac{1}{2} & \text{car } \frac{1}{2} > 0 \end{array}$$
Donc on a bien $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
4. f étant continue et dérivable sur $[0,1]$, et comme $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
Puisque $u_n \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
Mais comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'après la question 1, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
5. Cette propriété se démontre par récurrence. La démonstration est laissée au lecteur.
6. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$ d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

16. Session 16

✎ Calculs

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $A(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$ ou encore $= \frac{x^2+1}{x^2-1}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $B(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{1+3x}{x^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $C(x) = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} = \frac{x-2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{2-x}{(x-1)^2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $D(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2(x+1)-3(x-1)+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x+6}{(x-1)(x+1)}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, $E(x) = \frac{3}{x^2-4} + \frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{3}{(x-2)(x+2)} + \frac{2x}{(x-2)(x-2)} = \frac{3(x-2)+2x(x+2)}{(x-2)^2(x+2)} = \frac{2x^2+7x-6}{(x-2)^2(x+2)}$

✎ Exercice 1 (Cours)

Déjà vu en session 6

✎ Exercice 2 (Application)

1. On trouve $A^3 + A^2 - 5A = -3I$

2. Or,

$$\begin{aligned} A^3+A^2-5A=-3I &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(A^3+A^2-5A)=I \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{3}(A^2+A-5I)A=I \qquad \textit{(bien penser à mettre le } I\,!) \end{aligned}$$

Cela signifie que A est inversible et que son inverse vaut $A^{-1}=-\frac{1}{3}(A^2+A-5I)$

3. En remplaçant A^2 par la valeur trouvée en effectuant les calculs de la première question, on trouve : $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

1. $A^2=\begin{pmatrix}14&-25\\-5&9\end{pmatrix}$ donc $A^2-5A=\begin{pmatrix}14&-25\\-5&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15&-25\\-5&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I$.

2. $A^2-5A=-I \Leftrightarrow -A^2+5A=I \Leftrightarrow (-A+5I)A=I$ donc A est inversible et $A^{-1}=-A+5I=-\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$
On aurait obtenu le même résultat en calculant le déterminant de A : $\det(A)=1\neq 0$ donc A et inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$

✎ Exercice 4 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. **a.** On a $K^2=-I$.

b. Comme $K.(-K)=(-K).K=I$, K est inversible et $K^{-1}=-K$.

2. **a.** Comme I et K commutent, on peut utiliser une identité remarquable de matrices :

$$\begin{aligned} M^2 &= (aI+bK)^2=(aI)^2+2aI\times bK+(bK)^2=a^2I+2abK+b^2K^2 \underset{K^2=-I}{=} (a^2-b^2)I+2a(bK) \\ &\underset{bK=M-aI}{=} (a^2-b^2)I+2a(M-aI)=(a^2-b^2)I+2aM-2a^2I=-(a^2+b^2)I+2aM. \end{aligned}$$

b. Si $(a,b)\neq(0,0)$, alors $a^2+b^2\neq 0$ comme

$$\begin{aligned} M^2-2aM=-(a^2+b^2)I &\Leftrightarrow (M-2aI)M=-(a^2+b^2)I \\ &\Leftrightarrow M.\tfrac{1}{a^2+b^2}(2aI-M)=I \qquad \text{car } a^2+b^2\neq 0 \end{aligned}$$

M est inversible et $M^{-1}=\frac{2a}{a^2+b^2}I-\frac{1}{a^2+b^2}M$.

c. On a $\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}&1&-1&-3\\1&1+\sqrt{2}&1&-2\\0&-1&\sqrt{2}&1\\1&1&0&-2+\sqrt{2}\end{pmatrix}=\sqrt{2}.I+1.K$, donc, comme $(\sqrt{2},1)\neq(0,0)$,
cette matrice est inversible et

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}&1&-1&-3\\1&1+\sqrt{2}&1&-2\\0&-1&\sqrt{2}&1\\1&1&0&-2+\sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}I-\frac{1}{3}K.$$

17. Session 17

✎ Calculs

1. **a.** $25\geq x^2\geq 4$ par décroissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$.

b. Techniquement, cet encadrement doit être interprété de la sorte : $-2<x$ avec $x<0$, c'est-à-dire avec x dans $\mathbb{R}_-^*$.
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient $-\frac{1}{2}>\frac{1}{x}$.
(en effet, on ne peut pas prendre l'inverse de 0, et c'est pour cela que l'on doit penser les choses de cette manière !)

c. On procède par construction :

$$\begin{gathered} 1\leq k\leq n \\ 1\geq \tfrac{1}{k}\geq \tfrac{1}{n} \\ 2\geq 1+\tfrac{1}{k}\geq 1+\tfrac{1}{n} \\ \ln(2)\geq \ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\geq \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) \qquad \text{par croissance de la fonction } \ln \end{gathered}$$

d. $\forall x\in[1,3]$, $\dfrac{2x+5}{x+2}=\dfrac{2x+4+1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+1}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x+2}+\dfrac{1}{x+2}=2+\dfrac{1}{x+2}$

(Cette étape dont le but est d'utiliser la variable une seule fois dans l'expression est indispensable pour obtenir l'encadrement le plus fin possible)

Ainsi, $\forall x \in [1,3]$,

$$\begin{array}{cl} 1 \le x \le 3 & \\ 3 \le x+2 \le 5 & \\ \frac{1}{3} \ge \frac{1}{x+2} \ge \frac{1}{5} & \text{par décroissance de la fontion inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ 2+\frac{1}{3} \ge 2+\frac{1}{x+2} \ge 2+\frac{1}{5} & \\ \frac{7}{3} \ge \frac{2x+5}{x+2} \ge \frac{11}{5} & \end{array}$$

On pourra remarquer qu'il était possible d'obtenir un encadrement sans transformer au préalable l'expression et en étant très vigilant par rapport aux étapes intermédiaires (car il est incorrect de diviser membre à membre deux inégalités de même sens[1]) mais que cet encadrement était plus grossier que le premier encadrement trouvé ci-dessus, et donc peut-être pas suffisamment fin dans le cadre de certains exercices. Par exemple, pour l'étude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 2$, on pourra montrer avec la première technique que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,3]$ (puisque $\frac{11}{5}$ est plus grand que 1 et $\frac{7}{3}$ est plus petit que 3), mais pas avec la technique qui suit :

D'une part, $\forall x \in [1,3]$,

$$\begin{array}{cl} 1 \le x \le 3 & \\ 3 \le x+2 \le 5 & \\ \dfrac{1}{3} \ge \dfrac{1}{x+2} \ge \dfrac{1}{5} & \text{par décroissance de la fontion inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ \dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{x+2} \le \dfrac{1}{3} & \text{en écrivant l'inégalité de la droite vers la gauche} \end{array}$$

D'autre part, $\forall x \in [1,3]$,

$$\begin{array}{c} 1 \le x \le 3 \\ 2 \le 2x \le 6 \\ 7 \le 2x+5 \le 11 \end{array}$$

En multipliant membre à membre ces deux inégalités (licite car tous les nombres qui interviennent sont positifs), il vient, $\forall x \in [1,3]$,

$$\frac{7}{5} \le \frac{2x+5}{x+2} \le \frac{11}{3}$$

2. L'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \le \ln n \le \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \le \ln n \\ \displaystyle\ln n \le \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + 1 \le \ln n + 1 \\ \displaystyle\ln n + \frac{1}{n} \le \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le \ln n + 1 \\ \displaystyle\ln n + \frac{1}{n} \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \end{cases} \iff \ln n + \frac{1}{n} \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le \ln n + 1$$

En divisant cet encadrement par $\ln n > 0$ (car $n \le 1$), on obtient :

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \le \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \le 1 + \frac{1}{\ln n}$$

Or $1 + \frac{1}{n \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \frac{1}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Voici le tableau complété :

---

1. en divisant membre par membre $6 < 10$ par $2 < 5$, on obtient par exemple $3 < 2$, qui est évidemment faux!

X suit la loi...	notation	univers image	probabilité $\mathrm{P}(X=k)$	espérance	variance
Certaine égale à a	néant	$\{a\}$	$\mathrm{P}(X=a)=1$	a	0
uniforme sur $[\![1,n]\!]$	$\mathscr{U}([\![1,n]\!])$	$[\![1,n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
de Bernoulli de paramètre p	$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$\mathrm{P}(X=0)=1-p$ et $\mathrm{P}(X=1)=p$	p	$p(1-p)$
binomiale de paramètres n et p	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
de Poisson de paramètre λ	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Géométrique de paramètre p	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

2. **a.** Il s'agit de considérer une expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. On répète cette expérience n fois de manière identique et indépendante et on compte le nombre de succès.

b. Il s'agit de considérer une expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. On répète cette expérience de manière identique et indépendante et on considère le rang du premier succès.

c. Il s'agit d'une variable aléatoire dont l'univers-image est $\{0,1\}$.

d. Il s'agit d'une variable aléatoire dont l'univers-image est $[\![1,n]\!]$ et pour lequel toutes les probabilités $\mathrm{P}(X=k)$ sont équiprobables $\forall k \in [\![1,n]\!]$.

✎ Exercice 2 (Ce chapitre me fait très peur, je veux un exercice plutôt facile)

1. En considérant comme "succès" l'événement "le joueur tire dans la cible", de probabilité $0,7$, l'expérience consiste à répéter 12 fois cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès et suit donc la loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{7}{10}$: $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(12, \frac{7}{10}\right)$
2. En considérant comme "succès" l'événement "le joueur obtient 4", de probabilité $\frac{1}{4}$, l'expérience consiste à répéter cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante, et X représente le rang du premier succès et suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$: $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{4}\right)$
3. En considérant comme "succès" l'événement "l'individu a un groupe sanguin O", de probabilité $0,42$, l'expérience consiste à répéter 30 fois cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès et suit donc la loi binomiale de paramètres 30 et $\frac{21}{50}$: $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(30, \frac{21}{50}\right)$
4. Lorsqu'on lance deux pièces équilibrées, les deux lancers étant indépendants, les probabilités de tomber sur chaque couplage de faces $(0,1)$, $(0,3)$, $(1,1)$ et $(1,3)$ sont toutes de $\frac{1}{4}$.
Détaillons par exemple pour le premier couplage $(0,1)$: obtenir ce couplage signifie que la première pièce est tombée sur 0 et la deuxième pièce est tombée sur 1. On a donc :
$\mathrm{P}(0,1)=\mathrm{P}\big([Piece1=0]\cap[Piece2=1]\big) \underset{\text{indep}}{=} \mathrm{P}(Piece1=0)\times\mathrm{P}(Piece2=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
On raisonne de même pour les trois autres possibilités.
En additionnant les nombres obtenus, puisque $0+1=1$, $0+3=3$, $1+1=2$ et $1+3=4$, on trouve que $X(\Omega)=\{1,2,3,4\}$.
Et comme chacune de ces possibilités a pour probabilité $\frac{1}{4}$, il vient que $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1,4]\!])$.
5. Lorsqu'on lance deux pièces équilibrées, les deux lancers étant indépendants, la probabilité de faire un double pile est, avec des notations évidentes : $\mathrm{P}(P_1\cap \mathrm{P}_2)=\mathrm{P}(P_1)\mathrm{P}(P_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. En considérant comme "succès" l'événement "on obtient un double pile", de probabilité $\frac{1}{4}$, l'expérience consiste à répéter fois cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante et X désigne le rang du premier succès. donc X suit donc la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$: $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{4}\right)$
6. En considérant comme "succès" l'événement "la voiture passe par le guichet le plus à droite", de probabilité $\frac{1}{20}$, l'expérience consiste à répéter n fois cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès et suit donc la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{20}$: $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{20}\right)$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour aller plus loin)

1. Chaque urne peut-être choisie avec équiprobabilité et il y a des urnes numérotées entre 1 et $n+1$.
Donc pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $\mathrm{P}(U_k)=\frac{1}{n+1}$.
2. Considérons un entier k de $[\![1,n]\!]$ et supposons que l'urne k a été choisie.

- Si $k=1$, l'urne 1 ne contenant que des boules blanches, on est assurés de tomber sur une boule blanche au premier tirage, et X_n est donc nécessairement égale à 1. Conditionnellement à U_1, X_n est donc la loi certaine égale à 1.
- Si $k \in [\![2,n]\!]$, l'urne k, qui contient n boules, en contient $k-1$ noires, et donc $n-(k-1)$ blanches.
  En considérant comme succès l'événement "tirer une boule blanche" (de probabilité $\frac{n-k+1}{n}$), l'expérience consiste à répéter de manière identique et indépendantes une épreuve de Bernoulli et X_n correspond au rang du premier succès. Donc, conditionnellement à l'événement U_k, X_n suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$.

3. **a.** Si on a choisi l'urne U_{n+1}, l'urne ne contient aucune boule blanche, et X_n prend donc la valeur 0.
Donc $\mathrm{P}_{U_{n+1}}\big([X_n=1]\big)=0$

b. $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{P}_{U_k}\big([X_n=1]\big)=\big(1-\frac{n-k+1}{n}\big)^{1-1}\frac{n-k+1}{n}=\frac{n-k+1}{n}$ d'après la question 2.
(en effet, si $k=1$, on trouve $\mathrm{P}_{U_k}\big([X_n=1]\big)=1=\frac{n-k+1}{n}$ et la formule convient aussi)

c. D'après la formule des probabilités totales associées au système complet d'événements $\{U_k\}_{k\in[\![1,n+1]\!]}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big([X_n=1]\big) &= \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{P}(U_k)\mathrm{P}_{U_k}\big([X_n=1]\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(U_k)\mathrm{P}_{U_k}\big([X_n=1]\big) && \text{d'après la question 1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\,\frac{n-k+1}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big([X_n=1]\big) &= \tfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\\
&= \tfrac{1}{n(n+1)}\Big[n(n+1)-\sum_{k=1}^{n}k\Big]\\
&= \tfrac{1}{n(n+1)}\Big[n(n+1)-\tfrac{n(n+1)}{2}\Big]\\
&= \tfrac{1}{n(n+1)}\times\tfrac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

18. Session 18

✎ Calculs

1. I un intervalle sur lequel u est dérivable

fonction $x\mapsto\dots$	a	x^{α} $(\alpha\neq-1)$	$\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha\neq1)$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	e^{ax}
primitive $x\mapsto\dots$	ax	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$-\dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
fonction	au'	$u'u^{\alpha}$ $(\alpha\neq-1)$	$\dfrac{u'}{u^{\alpha}}$ $(\alpha\neq1)$	$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'e^{u}$
primitive	au	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$-\dfrac{1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}}$	$-\dfrac{1}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$2\sqrt{u}$	e^{u}
Condition sur u			$u\neq0$	$u\neq0$	$u\neq0$	$u>0$	

2. En désignant par des lettres majuscules les primitives des fonctions désignées par les minuscules correspondantes,

$F(x)=\ln(x-1)$ $\quad G(x)=-\dfrac{3}{x-2}$ $\quad H(x)=\frac{1}{5}e^{5x}$ $\quad J(x)=\ln\big(2+x^3\big)$

$K(x)=5\sqrt{3+x^2}$ $\quad L(x)=\frac{1}{3}\big(\ln x\big)^3$ $\quad M(x)=\dfrac{2}{(3-e^{2x})^2}$ $\quad N(x)=3x+\ln x+\frac{4}{x}$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. La positivité (ou la croissance) de l'intégrale

2. La linéarité de l'intégrale

✎ **Exercice 2 (Application)**

$A=\displaystyle\int_{-1}^{2}3x^2+4x-5\ \mathrm{d}x=\Big[x^3+2x^2-5x\Big]_{-1}^{2}=8+8-10+1-2-5=0$

$B=\displaystyle\int_{-1}^{1}6x^5-4x^3+7x\ \mathrm{d}x=0$ (la fonction étant impaire, et le domaine d'intégration étant symétrique par rapport à 0)

$C=\displaystyle\int_{0}^{1}3\sqrt{x}-4x\ \mathrm{d}x=\Big[2x\sqrt{x}-2x^2\Big]_0^1=2-2=0$

$D=\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=-\frac{3}{8}$

x^2-3x+2 a pour racines 1 et 2, est positif partout sauf entre 1 et 2 (donc négatif entre 1 et 2)

Donc sur $[0,1]$, $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$ et sur $[1,2]$, $|x^2-3x+2|=-x^2+3x-2$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
E&=\int_0^2|x^2-3x+2|\ \mathrm{d}x\\
&=\int_0^1|x^2-3x+2|\ \mathrm{d}x+\int_1^2|x^2-3x+2|\ \mathrm{d}x && \text{par la relation de Chasles}\\
&=\int_0^1x^2-3x+2\ \mathrm{d}x+\int_1^2-x^2+3x-2\ \mathrm{d}x && \text{d'après la remarque préliminaire}\\
&=\Big[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{3}{2}x^2+2x\Big]_0^1+\Big[-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{3}{2}x^2-2x\Big]_1^2\\
&=\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{2}+2-\tfrac{8}{3}+6-4+\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{2}+2\\
&=1
\end{aligned}$$

$F=\displaystyle\int_1^5\frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x=\int_1^5\tfrac{1}{x}\times\ln x\ \mathrm{d}x=\Big[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\Big]_1^5=\tfrac{1}{2}(\ln 5)^2$

$G=\displaystyle\int_{-1}^{2}e^{-2x+1}\ \mathrm{d}x=\Big[-\tfrac{1}{2}e^{-2x+1}\Big]_{-1}^{2}=-\tfrac{1}{2}e^{-3}+\tfrac{1}{2}e^3=\tfrac{1}{2}\big(e^3-e^{-3}\big)$

$H=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1\underset{\substack{1+x>0\\ \text{sur }[0,1]}}{=}\Big[\ln(1+x)\Big]_0^1=\ln 2$

$I=\displaystyle\int_{-1}^{2}(3x-2)^3\ \mathrm{d}x=\Big[\tfrac{1}{4\times3}(3x-2)^4\Big]_{-1}^{2}=\tfrac{1}{12}\big(4^4-5^4\big)=\tfrac{256-625}{12}=-\tfrac{369}{12}=-\frac{123}{4}$

$J=\displaystyle\int_0^2e^{\frac{1}{2}x+2}\ \mathrm{d}x=\Big[2e^{\frac{1}{2}x+2}\Big]_0^2=2\big(e^3-e^2\big)$

19. Session 19

✎ **Calculs**

1. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad (x+y)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}x^ky^{n-k}$

2. De la gauche vers la droite : développement .
De la droite vers la gauche : factorisation.

3. **a.** On peut commencer par ébaucher un triangle de Pascal pour trouver facilement les coefficient binomiaux utiles pour le calcul de A :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$A(x)=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$

$B(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}(-x)^k$

$C(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}\big(\tfrac{x}{2}\big)^k$

$D(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\tbinom{2n}{k}(2t)^k$

b. $E=(1+2)^n=3^n$

$F=-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tbinom{n}{k}=-(1-1)^n=0$

$G = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} = 2(2+3)^n = 2\cdot 5^n$

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq 1,$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\tfrac{1}{x^{k+1}}\right)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{1}{x^{k+1}}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= \big(p+(1-p)\big)^{n-1} - \tfrac{1}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\tfrac{p}{x}\right)^k(1-p)^{n-1-k} && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= 1-\tfrac{1}{x}\left(\tfrac{p}{x}+(1-p)\right)^{n-1} && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \boxed{1-\frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}}
\end{aligned}$$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. **a.** Séries géométriques : condition sur q : $-1 < q < 1$

Géométrique	Géométrique généralisée	Géométrique dérivée première	Géométrique dérivée seconde
$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$	$\sum_{n=p}^{+\infty} \alpha q^n = \frac{\alpha q^p}{1-q}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$	$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

b. Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$

✎ Exercice 2 (Application)

1.
- On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$ avec $-1<\frac{1}{3}<1$, donc la série est convergente et $A = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$
- On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1<\frac{1}{2}<1$, donc la série est convergente et $B = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$
- On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{5}$ avec $-1<\frac{1}{5}<1$, donc la série est convergente et $C = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^k} = \frac{1}{5}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$
- On reconnaît une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{4}$ avec $-1<\frac{1}{4}<1$, donc la série est convergente et $D = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{9}$
- On reconnaît une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1<\frac{1}{2}<1$, donc la série est convergente et $E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$
- On reconnaît une série géométrique dérivée seconde de raison $\frac{1}{3}$ avec $-1<\frac{1}{3}<1$, donc la série est convergente et $F = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = 2\times\frac{27}{8} = \frac{27}{4}$
- On reconnaît une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1<\frac{1}{2}<1$, donc la série est convergente et $G = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-1\right) = \frac{3}{2}$
- On reconnaît une série exponentielle de paramètre 3, donc la série est convergente et $H = e^3$
- On reconnaît une série exponentielle de paramètre 1, donc la série est convergente et $I = e$
- On reconnaît une série exponentielle de paramètre 2, donc la série est convergente et $J = 2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}-1-2\right) = 2\left(e^2-3\right)$

20. Session 20

✎ Calculs

1. **a.** $A_n = \dfrac{n+n(n+1)+(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \dfrac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2}$

   b. $B(a,b) = \dfrac{a^3-b^3-(a+b)^2(a-b)}{(a-b)^2} = \dfrac{a^3-b^3-(a+b)(a^2-b^2)}{(a-b)^2} = \dfrac{\cancel{a^3}-\cancel{b^3}-\cancel{a^3}+ab^2-a^2b+\cancel{b^3}}{(a-b)^2} = \dfrac{ab(b-a)}{(a-b)^2} = -\dfrac{ab}{a-b}$

   c. $C_n = \dfrac{3\times\cancel{2(n+1)}}{\cancel{n(n-1)}(2n-2)} \times \dfrac{n^{\cancel{2}}(n-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2n+2}} = \dfrac{3(n-1)}{2(n-1)} = \dfrac{3}{2}$

2. **a.** $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$ et $\frac{5}{9} = \frac{25}{45}$ donc $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$

   b. $\frac{12}{11} > 1$ et $\frac{10}{12} < 1$ donc $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$

   c. $\frac{105}{21} = 5 = \frac{125}{25}$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 4 peut être composée au plus de 4 vecteurs.

✎ Exercice 2 (Application)

1. La famille étant constituée d'un seul vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, elle est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. La famille étant constituée de deux vecteurs colinéaires, elle est liée. En effet, $(-3,1,-2) = -6\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$
3. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
a(1,2,0)+b(3,-1,2)+c(1,0,-1) = (0,0,0) \quad &\Leftrightarrow \quad (a+3b+c\ ,\ 2a-b\ ,\ 2b-c) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ 2a-b=0 \\ 2b-c=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ b=2a \\ c=2b=4a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 11a=0 \\ b=2a \\ c=4a \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c=0
\end{aligned}$$

   Donc la famille $\big((1,2,0),(3,-1,2),(1,0,-1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
4. La famille contient le vecteur nul, elle est donc liée.
5. La famille est constituée de quatre vecteurs dans un espace de dimension deux, elle est donc liée.
6. La famille est constituée de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires, elle est donc libre dans $\mathbb{R}^2$.

21. Session 21

✎ Calculs

1. Pour tous n et m entiers naturels non nuls,

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j} \qquad\qquad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \underset{(0\le j\le i\le n)}{=} \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

2.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(\tfrac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k+1)-\ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n+2} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) && \text{par changement d'indice} \\
&= \ln(n+2)-\ln(1) && \text{par télescopage} = \ln(n+2)
\end{aligned}$$

$$B = \prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=1}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \text{(ou encore } \sqrt{2}^{n(n+1)}\text{)}$$

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} - \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{i} && \text{en posant le chgt de var } i = n+1-k \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \tfrac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \tfrac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{j} \times \tfrac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{j+1}{2} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \cdots = \frac{n(n+3)}{4}$$

$$E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{j^2(j+1)}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) = \tfrac{n^2(n+1)^2}{8} + \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \tfrac{n(n+1)}{4} \times \left(\tfrac{n(n+1)}{2} + \tfrac{2n+1}{3}\right) = \tfrac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$$

✎ Exercice 1 (Cours)

1. On appelle $X(\Omega)$ l'univers-image de la variable aléatoire X.
2. L'ensemble $\{(X = k), k \in X(\Omega)\}$ représente un système complet d'événements.
3. $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = k) = 1$ lorsque X est une variable aléatoire discrète.

✎ Exercice 2 (Application)

1. On matérialise tout d'abord dans un tableau à double entrée le produit des faces obtenues en fonction du résultat des deux dés :

$dé1 \backslash dé2$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

On en déduit l'univers image de X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$.
De plus, les 16 cases de ce tableau étant équiprobables (par indépendance des lancers de dés), on en déduit la loi de X suivante :

k	0	1	2	3	4	6	9
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2. Pour commencer, on donne l'univers-image de X. Il ne peut y avoir que 0, ou 1 ou 2 clients mécontents parmi les clients contactés. Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
On réfléchit ensuite au nombre de 5-uplets différents de clients contactés possibles. Il y en a $\binom{10}{5}$ équiprobables.
On calcule ce nombre : $\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 3 \times 2 \times 7 \times 6$
Parmi ces 5-uplets de clients contactés, on dénombre maintenant ceux :
   - parmi lesquels il y a 0 clients mécontents :
   Il y a en a $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 7 \times 2$
   - parmi lesquels il y a 1 client mécontent :
   Il y a 2 manières de choisir ce client mécontent, et il y a $\binom{8}{4}$ manières de choisir les 4 autres clients. Au final, on en déduit le nombre de 5-uplets de clients parmi lesquels un seul client est mécontent :
   $$2 \times \binom{8}{4} = 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2 \times 7 \times 2 \times 5$$
   - parmi lesquels il y a 2 clients mécontents :
   Il y a une seule manière de choisir les deux clients mécontents, et il reste autres 3 clients à choisir. Au final, on en déduit le nombre de 5-uplets de clients parmi lesquels deux clients sont mécontents :
   $$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 7 \times 2$$

On en déduit les probabilités suivantes :

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4\times7\times2}{3\times2\times7\times6}=\frac{2}{9}\qquad \mathrm{P}(X=1)=\frac{2\times7\times2\times5}{3\times2\times7\times6}=\frac{5}{9}\qquad \mathrm{P}(X=2)=\frac{4\times7\times2}{3\times2\times7\times6}=\frac{2}{9}$$

On peut alors résumer la loi de X dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

✎ Exercice 3 (J'en veux encore plus... pour m'entraîner sur les bases)

3. **d.** Puisque $\{[X_n=0],[X_n=1],[X_n\geq2]\}$ est un système complet d'événements, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big([X_n=0]\big)&=1-\mathrm{P}\big([X_n=1]\big)-\big([X_n\geq2]\big)\\&=1-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}\\&=\frac{2(n+1)-(n+1)-(n-1)}{2(n+1)}\\&=\frac{2}{2(n+1)}=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

e. On aurait pu anticiper ce résultat : en fait, ne jamais obtenir de boule blanche, c'est avoir choisi l'urne numérotée $n+1$ (car dans les autres urnes, par propriété de la loi géométrique, on tombera sur une boule blanche « un jour ou l'autre »). On a donc :

$$\mathrm{P}(X_n=0)=\mathrm{P}(U_k)=\frac{1}{n+1}$$

22. Session 22

✎ Calculs

1. Les résultats des trois calculs sont :

$$\begin{pmatrix}3\\8\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&3&-2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&1&1&5\end{pmatrix}$$

- Dans le premier calcul, on n'a eu besoin que de recopier la troisième colonne de la matrice carrée.
- Dans le deuxième calcul, on a effectué la combinaison linéaire $2C_1-C_3$ (avec les notations habituelles pour les colonnes de la matrice carrée).
- Dans le troisième calcul, on n'a eu besoin que de recopier la quatrième ligne de la matrice carrée.
- Dans le dernier calcul, on a effectué la combinaison linéaire $L_1+2L_2-L_4$.

2. **a.** Multiplier à droite une matrice carrée par une matrice colonne revient à faire la combinaison linéaire des colonnes de cette matrice, affectée des coefficients de la colonne.

b. Multiplier à gauche une matrice carrée par une matrice ligne revient à faire la combinaison linéaire des lignes de cette matrice, affectée des coefficients de la ligne.

3. On rappelle qu'on ne peut pas changer l'ordre dans lequel les matrices sont écrites (le produit matriciel n'étant pas commutatif) mais on peut choisir quelle multiplication faire en premier (le produit est associatif). Ainsi, On choisira de faire en premier la première et la troisième multiplication, et on réserve la deuxième pour la fin :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&3&1\\0&0&2&-1&0\\6&8&-7&9&-8\\3&1&5&0&-1\\7&0&2&9&0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-1&0&-1&1&2\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}2&3&-1&0&1\\4&-2&0&0&-1\\0&7&2&1&0\\0&1&0&1&0\\-1&2&-3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-4\\-3\\2\\0\\-1\end{pmatrix}}$$

Ce dernier calcul matriciel est extrêmement simple. Au final, la réponse est la matrice de taille 1x1 réduite au nombre 0.

✎ Exercice 1 (Cours)

1.
- Fonction paire : $\forall x\in\mathbb{D}_f,\quad -x\in\mathbb{D}_f\quad$ et $\quad f(-x)=f(x)$.
  La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Fonction impaire : $\forall x\in\mathbb{D}_f,\quad -x\in\mathbb{D}_f\quad$ et $\quad f(-x)=-f(x)$
  La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

2. I est stable par f signifie que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.

✎ Exercice 2 (Application)

1. f est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. *(Son domaine est donc symétrique par rapport à 0)* Ainsi :
$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f \quad$ et $f(-x) = \frac{3(-x)^3+5x}{(-x)^2+2} = -\frac{x^3-5x}{x^2+2} = f(x)$
Donc f est impaire.
2. g est définie sur $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
En effet, son dénominateur ne s'y annule pas puisque : $e^{-2x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ Ainsi :
$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad -x \in \mathscr{D}_g \quad$ et $g(-x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$
D'autre part, $\forall x \in \mathscr{D}_g \quad g(x) = \frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} = \frac{\frac{1}{e^{2x}}+1}{\frac{1}{e^{2x}}-1} = \frac{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}} = -\frac{e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} = -g(-x)$
Donc $\quad \forall x \in \mathscr{D}_g, \quad -x \in \mathscr{D}_g \quad$ et $g(-x) = -g(x)$ et donc g est impaire.
3. Montrons tout d'abord que le domaine de définition de h est $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^2 + 1 > 0$ donc la racine est bien définie.
Reste à prouver que le logarithme l'est lui aussi :
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
& 1 > 0 \\
& 4x^2 + 1 > 4x^2 \\
& \sqrt{4x^2+1} > \sqrt{4x^2} && \text{par croissance de la fonction racine carrée sur } \mathbb{R}^+ \\
& \sqrt{4x^2+1} > |2x| \\
\text{or} \quad & |2x| \geq 2x \\
\text{donc} \quad & \sqrt{4x^2+1} - 2x \geq 0
\end{aligned}$$
$\forall x \in \mathscr{D}_h, \quad -x \in \mathscr{D}_h \quad$ et $h(x) + h(-x) = \ln\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right) + \ln\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right) = \ln\left[\left(\sqrt{4x^2+1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)\right] = \ln(1) = 0$
On a donc montré que $h(x) + h(-x) = 0$ c'est-à-dire que $h(x) = -h(x)$

✎ Exercice 3 (Application)

On verra (ou pas) la ressemblance avec l'ex 1d de la session 17. C'est la même question posée différemment.
En maths, il est souvent utile de savoir reformuler une question et on se rend souvent compte qu'il s'agit d'une question que l'on sait déjà faire, sauf que c'est dit d'une autre manière !
On peut donc se référer à la méthode de la session 17, ou procéder autrement pour changer :
f étant une fonction dérivable sur $[1,3]$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,3]$ et donc :
$\forall x \in [1,3], \quad f'(x) = \frac{2(x+2)-(2x+5)}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0 \qquad$ f est donc décroissante sur $[1,3]$, donc :
$\forall x \in [1,3] \qquad f(1) \geq f(x) \geq f(3) \qquad$ c'est-à-dire $\quad \frac{7}{3} \geq f(x) \geq \frac{11}{5}$
Mais puisque $\frac{11}{5} > 1$ et $\frac{7}{3} < 3$, on en déduit que pour tout $x \in [1,3]$, $\quad f(x) \in [1,3]$ et donc que $[1,3]$ est stable par f.

23. Session 23

✎ Exercice 2 (Application)

On ne pourra pas s'empêcher de se souvenir de l'ex 3 de la session précédente et de remarquer qu'en utilisant la fonction f définie sur $[1,3]$ par $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n entier naturel.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose HR_n : "u_n existe et $1 \leq u_n \leq 3$ "

Initialisation : $u_0 = 2$ donc HR_0 est vérifiée

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose HR_n vérifiée

- On sait que $1 \leq u_n \leq 3$ (d'après HR_n), donc $f(u_n)$ existe puisque f est définie sur $[1,3]$ (rappel : en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,3]$)
donc u_{n+1} existe.
- D'autre part, on sait que :
  - $u_n \in [1,3]$ d'après HR_n
  - $[1,3]$ est stable par f

  Alors, on est sûrs que $f(u_n)$ est dans $[1,3]$, c'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 3$

Au final, HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq 3$

On a donc montré que (u_n) est bien définie *(on vérifiera à l'occasion d'avoir bien distingué la notation $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ donnée en conclusion du raisonnement par récurrence qui parle de CHAQUE terme de la suite considéré un à un et la notation (u_n) en conclusion de l'exercice qui considère en un seul coup l'infinité des termes de la suite)* et que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 3$

24. Session 24

✎ Exercice 1 (Cours)

1. La notation Vect(...) désigne le "sous espace vectoriel engendré par ...", ce qui correspond à l'infinité des combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs de ... .
   En particulier, Vect$(\overrightarrow{u})$ désigne par exemple l'ensemble des vecteurs qui sont colinéaires à $\overrightarrow{u}$
2. Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires.
3. Une famille d'un vecteur est libre si et seulement si elle est constituée d'un vecteur non nul.
4. Pour les familles de plus de trois vecteurs, la réponse n'est pas si immédiate et on relira à ce propos la méthode 2.3 du chapitre 17 du cours de M. Brossard.

✎ Exercice 2 (Application)

(Souvent, le "tel que" ou le "avec" qui figurent dans les définitions des ensembles proposés dans l'énoncé sont notés avec une simple virgule. C'est la notation simplifiée suivante que l'on utilisera dans les rédactions de la correction.)

1. Selon son aisance, on peut évidemment zapper une ou plusieurs étapes intermédiaires dans la rédaction :
$$\begin{aligned} E &= \left\{(a, b-a),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(a,-a) + (0,-b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{a(1,-1) + b(0,-1),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\big((1,-1),(0,-1)\big) \end{aligned}$$
   E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((1,-1),(0,-1)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée de deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E) = 2$.
2. De même, en raccourcissant un chouillas les étapes de calcul :
$$\begin{aligned} E &= \left\{(x+y, y-x, 3x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x(1,-1,3) + y(1,1,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\big((1,-1,3),(1,1,0)\big) \end{aligned}$$
   E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((1,-1,3),(1,1,0)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée de deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E) = 2$.
3. A peine plus évolué :
$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y),\ x = 2y\right\} \\ &= \left\{(2y,y),\ y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{y(2,1),\ y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{Vect}\big((2,1)\big) \end{aligned}$$
   E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((2,1)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée d'un vecteur non nul), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E) = 1$.
4. *(Dans cet exemple, on sera bien vigilant à remplacer dans le triplet de départ la seule contrainte que l'on a et de **garder** l'inconnue z, dont on ne fait rien, mais qui peut elle aussi valloir n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$)*
$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y\right\} \\ &= \left\{(-y,y,z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\big((-1,1,0),(0,0,1)\big) \end{aligned}$$
   E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((-1,1,0),(0,0,1)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée de deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E) = 2$.

5. *(Avant de chercher à exprimer E en tant qu'espace vectoriel engendré, on résout tout d'abord un simple système (la substitution fonctionne très bien ici parce que l'on constate que l'on peut exprimer à la fois z et y très simplement en fonction de x))*

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-2x \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y=0 \text{ et } 2x+z=0\} \\ &= \{(x,x,-2x)\in\mathbb{R}^3,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((1,1,-2)\big) \end{aligned}$$

E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((1,1,-2)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée d'un vecteur non nul), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E)=1$.

6. *(Avant de chercher à exprimer E en tant qu'espace vectoriel engendré, on résout tout d'abord un simple système (la méthode de Gauss est adaptée ici parce que les deux équations font intervenir les trois inconnues))*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow 2L_1-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3y \\ 2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3y \\ x=2y \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\} \\ &= \{(2y,y,-3y)\in\mathbb{R}^3,\ y\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\big((2,1,-3)\big) \end{aligned}$$

E est donc engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc un espace vectoriel. La famille $\big((2,1,-3)\big)$, génératrice de E, est aussi libre (constituée d'un vecteur non nul), c'est donc une base de E et on a donc $\dim(E)=1$.

25. Session 25

✎ Exercice 1 (Cours)

1.
- $\mathrm{E}(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} k\mathrm{P}(X=k)$ $\qquad \mathrm{E}(X^2)=\sum_{k\in X(\Omega)} k^2\mathrm{P}(X=k)$
- Formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$

condition pour tous ces calculs d'espérance $\updownarrow$ séries absolument convergentes ou sommes finies

- Théorème de transfert : $\mathrm{E}\big(g(X)\big)=\sum_{k\in X(\Omega)} g(k)\mathrm{P}(X=k)$
- Linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$
- Règle calculatoire sur la variance : $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

2. Une série absolument convergente est toujours automatiquement convergente.
En revanche, on peut affirmer qu'une série convergente est absolument convergente lorsque l'on sait que c'est une série à terme positif. *(Hyper utile quand on fait des calcul d'espérance !! On s'en servira dans l'exercice d'application ci-dessous)*

✎ Exercice 2 (Je mets les mains dans le cambouis)

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
$X(\Omega)=[\![1,n]\!]$ donc il s'agit d'une variable aléatoire finie. *(comprendre : "l'univers-image contient un nombre fini de nombres")*
X admet donc une espérance, un moment d'ordre 2, $E(X^2)$, et une variance.
(Puisqu'ici, $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, dans les formules, on indexe directement la somme de 1 à n)

- $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} k\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$
- $\mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

- $V(X)=\mathrm{E}\big(X^2\big)-\mathrm{E}(X)^2=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{(n+1)^2}{4}\underset{(*)}{=}\dfrac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}\underset{(**)}{=}\dfrac{(n+1)\big[2(2n+1)-3(n+1)\big]}{12}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{12}$
  $\mathrm{V}(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$
  $(*)$ On ne met pas tout sur 24 comme des bourrins, on cherche le meilleur dénominateur commun, c-à-d le plus petit nombre à la fois dans la table de 6 et de 4
  $(**)$ On ne développe pas comme des bourrins, on factorise comme des personnes subtiles que nous sommes

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
On a alors $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ *(cela nous donne l'indication précieuse de la plage sur laquelle on indexe les sigma des formules !)*

- X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 1} kp(1-p)^k$ est absolument convergente.
  Or $\forall k\in\mathbb{N}^*$,
  $$kp(1-p)^k=p(1-p)\times k(1-p)^{k-1}$$
  On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée première de raison $1-p$ avec $-1<1-p<1$ puisque $p\in]0,1[$. C'est donc une série convergente et donc absolument convergente (à termes positifs).
  Donc X admet une espérance et :
  $$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{+\infty}kp(1-p)^k\\&=p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\\&=p(1-p)\times\frac{1}{\big(1-(1-p)\big)^2}\\&=\frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

- X admet un moment d'ordre deux si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 1} k^2p(1-p)^k$ est absolument convergente.
  Or $\forall k\in\mathbb{N}^*$,
  $$k^2p(1-p)^k=p\times\big[k(k-1)+k\big](1-p)^k=p(1-p)^2\times k(k-1)(1-p)^{k-2}+p(1-p)\times k(1-p)^{k-1}$$
  On reconnaît la combinaison linéaire des termes généraux d'une série géométrique dérivée seconde et d'une série d'une série géométrique dérivée première de raison $1-p$ avec $-1<1-p<1$ puisque $p\in]0,1[$. C'est donc une série convergente et donc absolument convergente (à termes positifs).
  Donc X admet un moment d'ordre deux et :
  $$\begin{aligned}E\big(X^2\big)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2p(1-p)^k\\&=p(1-p)^2\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)(1-p)^{k-2}+p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\\&=p(1-p)^2\times\frac{2}{\big(1-(1-p)\big)^3}+\frac{1-p}{p}&&\text{en se servant du calcul similaire fait plus haut}\\&=\frac{2(1-p)^2}{p^2}+\frac{1-p}{p}\\&=\frac{2(1-p)^2+p(1-p)}{p^2}\\&=\frac{(1-p)\big[2(1-p)+p\big]}{p^2}\\&=\frac{(1-p)(2-p)}{p^2}\end{aligned}$$

- X admet une espérance car elle admet un moment d'ordre 2 et, grâce à la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}(X) &= \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 \\
&= \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)\left[(2-p)-(1-p)\right]}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 0} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est absolument convergente. Le premier terme de cette série est nul et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

On reconnaît le multiple du terme général d'une série exponentielle de paramètre λ. C'est donc une série convergente et donc absolument convergente (à termes positifs).
Donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} && \text{en effectuant le changement d'indice } j = k-1 \\
&= \lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

- X admet un moment d'ordre deux si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geq 0} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ est absolument convergente. Le premier terme de cette série est nul et $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \left[k(k-1)+k\right]e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\left[k(k-1)\times\frac{\lambda^k}{k!} + k\times\frac{\lambda^k}{k!}\right]$$

La série de terme général $k(k-1)\times\frac{\lambda^k}{k!}$ a ses deux premiers termes nul, et pour tout $k\geq 2$, $k(k-1)\times\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda^2\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$.
C'est le multiple une série exponentielle convergente, donc elle est convergente.
La série de terme général $k\times\frac{\lambda^k}{k!}$ a déjà été étudiée plus haut, elle est convergente également.
On reconnaît donc la combinaison linéaire des termes généraux de deux séries exponentielles. C'est donc une série convergente et donc absolument convergente (à termes positifs).
Donc X admet un moment d'ordre deux et :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&\underset{j=k-2}{=} \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} + \lambda && \text{en se servant du calcul similaire fait plus haut} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

- X admet une espérance car elle admet un moment d'ordre 2 et, grâce à la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2\\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2\\ &= \lambda\end{aligned}$$

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc il s'agit d'une variable aléatoire finie.
X admet donc une espérance, un moment d'ordre 2, $E(X^2)$, et une variance.
Le prérequis a déjà été démontré dans le calcul F de la session 7, il faut être capable de faire ça tout seul. Si ce n'est toujours pas le cas, reprenez les calculs de la session 7 ou entraînez vous sur d'autres calculs similaires ici.

- En remarquant que le premier terme de la somme est nul :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n \times \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} && \text{en utilisant le prérequis}\\ &= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}\\ &= np\left[p + (1-p)\right]^{n-1} && \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= np \times 1^{n-1}\\ &= np\end{aligned}$$

- En utilisant la formule le désormais fameux $k^2 = k(k-1) + k$, et la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, et la formule du binôme de Newton de nouveau, on trouvera le moment d'ordre 2 :
$\mathrm{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + np$
- On en déduira $V(X) = np(1-p)$ comme attendu. ouf !

26. Session 26

✎ Exercice 1 (Cours)

Intégration par parties : Si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

✎ Exercice 2 (Application)

1. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

On pose $\begin{array}{ccc} u(x) = x & \text{donc} & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \text{avec} & v(x) = -e^{-x}\end{array}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. En effectuant une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned}I &= \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_0^1\\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1\\ &= 1 - 2e^{-1}\end{aligned}$$

2. $I = \displaystyle\int_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x$

On pose $\begin{array}{ccc} u(x) = \ln x & \text{donc} & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{avec} & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,e]$. En effectuant une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{2} x \,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

3. $I = \displaystyle\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\begin{array}{ccc} u(t) = \ln t & \text{donc} & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \text{avec} & v(t) = t \end{array}$ avec u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,x]$. En effectuant une IPP, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x 1 \,\mathrm{d}t \\ &= x \ln x - [t]_1^x \\ &= x \ln x - x + 1 \end{aligned}$$

4. $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \,\mathrm{d}x$

On pose $\begin{array}{ccccc} u(x) = x^2 & \text{donc} & u'(x) = 2x & \text{donc} & u''(x) = 2 \\ v'(x) = e^x & \text{avec} & v(x) = e^x & \text{et} & V(x) = e^x \end{array}$ avec u et V de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. En effectuant deux IPP, il vient :

$$\begin{aligned} I &= \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \left[2xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 2e^x \,\mathrm{d}x \\ &= e - 2e + \left[2e^x\right]_0^1 \\ &= -e + 2e - 2 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$