

EXERCICES DE RÉVISIONS – ÉTÉ 2026

Table des matières

1	Analyse	2
1.1	Études de fonctions	2
1.2	Études de suites	2
1.3	Exercice de concours	4
2	Algèbre	5
2.1	Espaces vectoriels, familles de vecteurs	5
2.2	Applications linéaires et matrices	6
2.3	Exercice de concours	6
3	Probabilités	8
3.1	Probabilités, conditionnement	8
3.2	Variables aléatoires	9
3.3	Exercice de concours	10

Mode d'emploi

Les exercices suivants couvrent une partie (non exhaustive) du programme de première année, notamment des méthodes utiles en deuxième année mais que nous n'aurons pas forcément l'occasion de revoir en détail en cours (voir notamment les méthodes sur les suites dans le paragraphe 1.2). Les exercices de chaque paragraphe sont généralement rangés par ordre de difficulté, en commençant par des applications directes de notions ou méthodes du cours. Chaque partie s'achève par un exercice de concours, qui n'est pas forcément plus difficile que les exercices précédents.

Voici quelques recommandations pour traiter ces exercices :

- Commencez par les premiers exercices d'un thème qui vous a posé des difficultés cette année, pour travailler les définitions et méthodes élémentaires.
- Ne traitez pas forcément les paragraphes dans l'ordre, et variez les sujets (n'attendez pas d'avoir fini la partie 1 avant de passer à la partie 2, et ainsi de suite).
- Travaillez les méthodes plus spécifiques, surtout dans la partie 1 (calculs de limites, suites implicites, suites définies par récurrence) : ce sont des méthodes de première année qui apparaissent régulièrement dans les épreuves de concours.
- Traitez les trois exercices de concours peu avant la rentrée, pour vous habituer au format des exercices que vous aurez en DS cette année.

Vous aurez aussi accès aux corrections de tous ces exercices. **Attention**, il n'est **vraiment pas utile** de consulter une correction dès que vous bloquez sur un exercice : il faut plutôt commencer par consulter vos cours et TD de première année pour trouver des questions similaires, et s'en inspirer pour l'exercice que vous traitez. Si vous ne trouvez pas d'idée, vous pouvez aussi demander des indications, à moi-même ou à vos camarades. En dernier recours vous pouvez regarder la correction, mais elle est beaucoup moins utile si vous n'avez pas déjà bien réfléchi à la question. Elle doit surtout vous servir à vérifier vos résultats et votre rédaction, et je vous encourage à la consulter en détail après avoir fini chaque exercice.

1 Analyse

1.1 Études de fonctions

Exercice 1 - Démonstration d'inégalités

- Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x.$
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - 1 \leq x \ln x.$

Exercice 2 - Deux fonctions classiques

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

- Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.
- Déterminer le signe de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
- Étudier le sens de variation de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les tangentes en 0 aux courbes de chacune de ces fonctions.
- Etudier la convexité de ces fonctions.
- Tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Exercice 3 - Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes (classées par « thème »).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right);$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1};$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - \ln x}{e^x - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1};$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(6-x)^7 - 1}{x-5};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2}}{x-2};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - x + 1} - 5x;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}};$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

Exercice 4 - Dérivabilité d'un prolongement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
- f est-elle dérivable sur $[0; +\infty[$?

1.2 Études de suites

Exercice 5 - Produit et encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6 - Suite implicite de type $f(u_n) = n$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution que l'on notera x_n .
(b) Calculer x_1 . Étudier la monotonie et la convergence de (x_n) .
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, comparer $f(n)$ et n . En déduire que $x_n \leq n$.
(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n - \ln n \leq x_n$.
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 7 - Suite implicite de type $f_n(u_n) = 0$

Pour $n \geq 1$, on note $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ et on considère l'équation $(E_n) : P_n(x) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, (E_n) admet une unique solution a_n dans $[0; 1]$.
2. Calculer a_1 et a_2 .
3. Comparer $P_{n+1}(a_n)$ et $P_{n+1}(a_{n+1})$. En déduire que la suite (a_n) est monotone, et qu'elle converge.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < a_n \leq a_2 < 1$. En déduire la limite de la suite (a_n) .

Exercice 8 - Suite définie par récurrence (méthode générale)

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{x^3 + 6x}{3x^2 + 2}$

1. Déterminer le tableau de variations de f .
2. Étudier le signe de $f(x) - x$. En déduire les points fixes de f .
3. Que dire de la suite dans le cas où $u_0 = 0$? Où $u_0 = -\sqrt{2}$? Où $u_0 = \sqrt{2}$?
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; \sqrt{2}[$.
(a) Montrer que pour tout n , $u_n \in]0; \sqrt{2}[$.
(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .
5. Reprendre l'étude de la question précédente dans le cas où $u_0 > \sqrt{2}$, puis dans le cas où $u_0 < 0$.

Exercice 9 - Récurrence et accroissements finis

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

1. (a) Montrer que f est paire. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
(b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ (on pourra étudier $g : x \mapsto f(x) - x$). Justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$).
(c) Montrer que, pour tout réel x , $|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
Indication : On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
- (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- (d) Écrire un script Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

1.3 Exercice de concours

Exercice 10 - EDHEC ECE 2022 (ex3)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{x}{x+n}.$$

Dresser le tableau de variations de f_n .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$. Montrer que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et en déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
- (c) Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, qu'on notera γ , et justifier que $0 \leq \gamma \leq 1$.
4. (a) Déterminer deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : pour tous $x \in [0; 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$.
 En déduire une expression de l'intégrale u_k .

- (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite ?
- (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
- (c) Déterminer un encadrement de γ faisant intervenir S_n et T_n .
6. On peut utiliser les termes S_n pour obtenir une approximation de γ .
- (a) Donner une expression de $T_n - S_n$.
- (b) Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
1 n = 1
  s = 1-log(2)
  while ... :
      n = ...
5      s = s + ...
  print(s)
```

2 Algèbre

2.1 Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Exercice 11 - S.e.v., base, dimension

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = 0 \text{ et } -x - 4y + 2z = 0\}$;
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P'(1) = 0\}$;
4. $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)P'(x) - xP''(x) = 2P(x)\}$;
5. $F_5 = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de taille 2×2 ;
6. $F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$;
7. $F_7 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$, où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ fixés.

Exercice 12 - Matrice de passage

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.
3. Justifier l'inversibilité de P et déterminer son inverse.
4. Déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ directement (sans utiliser la matrice de passage).
5. Retrouver le résultat en utilisant la matrice de passage.

Exercice 13 - Introduction à la diagonalisation

On considère $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Pour tout réel λ , on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
2. Justifier que $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
3. Montrer que la **concaténation** des bases trouvées dans les questions 1 et 2 forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
Rappel : La **concaténation** de deux familles est une famille qui contient tous les vecteurs de la première puis tous ceux de la deuxième.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

2.2 Applications linéaires et matrices

Exercice 14 - Applications linéaires, mais pas endomorphismes

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (x - 2y, x, 3x + y)$ et g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (x + 3y + 2z, -2x + z)$.

1. Déterminer l'application $g \circ f$ et montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Qu'en est-il de l'application $f \circ g$?
3. Retrouver ces résultats en se servant des matrices d'applications linéaires.

Exercice 15 - Applications linéaires, image, noyau, matrice

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, puis donner leur noyau et leur image, préciser si elles sont injectives ou surjectives, et enfin donner leur matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \mapsto (x; 2x - 3y; x + 4y) \end{cases} ;$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \mapsto (-x + y; x - y; 2x + 2y) \end{cases} ;$
3. $h = 2f - 3g ;$
4. $\ell : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) & \mapsto \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix} \end{cases} .$

Exercice 16 - Polynôme annulateur et matrice inversible

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ défini par $P(x) = x^2 - 5x + 4$, montrer que P est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire que A est inversible, puis donner A^{-1} .

Exercice 17 - Matrice d'application linéaire et changement de base

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_1$, et soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, 1, 2)$. On admettra que $\mathcal{C}_1 = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de passage $P_1 = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}$ de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{C}_1$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1}(f)$. Exprimer B en fonction de A , P_1 et P_1^{-1} .
3. Application : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
 $f(x, y, z) = (-2x + 2y - 4z, -3x + 3y - 4z, 3x - y + 6z)$. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}_1$.

2.3 Exercice de concours

Exercice 18 - EDHEC ECE 2021 (ex3 adapté)

On considère un nombre réel a dans $]0; 1[$, ainsi que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a & a & 0 \\ 0 & 1 - a & a \end{pmatrix}$.

On note également I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\}.$$

1. (a) Montrer que $F = \text{Ker}(M_a - I)$ est un espace vectoriel, et déterminer une base de F , qu'on notera $\mathcal{B}_F$.
 (b) On admet que $G = \text{Ker}(M_a - aI)$ est également un espace vectoriel, déterminer une base de G , qu'on notera $\mathcal{B}_G$.
 (c) On note $\mathcal{B}$ la famille formée des vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ (*i.e.* la **concaténation** de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$).
 La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

2. On note E l'espace vectoriel engendré par I , M_a et M_a^2 .

- (a) Quelle est la dimension de E ?

- (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

- (c) En déduire que M_a^3 appartient à E .

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que :

$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$

On donnera les valeurs de u_0 , v_0 et w_0 , et on exprimera u_{n+1} , v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n , v_n et w_n .

- (b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Python** ci-dessous ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n , v_n et w_n lorsque n et a sont renseignés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle **for**.

```

1  n = int(input('Entrez une valeur pour n :'))
   a = float(input('Entrez une valeur pour a :'))
   u = 0
   v = 0
5  w = 1
   for k in range(n) :
       u = (2*a+1)*u + v
       v = -a*(a+2)*u + w
       w = a*a*u
10 print(u, v, w)
```

- (c) Réécrire ce script en le corrigeant pour qu'il calcule correctement u_n , v_n et w_n .

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = (2a + 1)u_{n+2} - a(a + 2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On **admet** qu'on peut en déduire l'expression suivante pour (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices, on dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$ si et seulement si : chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé au même emplacement dans A . On admet alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) M_a^2 + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right) M_a + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \right) I.$$

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

6. En déduire la matrice $L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n$.

7. Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

8. (a) Montrer que : $\forall X \in \text{Ker}(M_a - I), L_a X = X$.

- (b) Montrer que : $\forall Y \in \text{Im}(M_a - I), L_a Y = 0_{3,1}$.

3 Probabilités

3.1 Probabilités, conditionnement

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « face » est $\frac{1}{3}$.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun résultat « face » ? et d'obtenir au moins un résultat « face » ?
2. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, quelle est la probabilité d'obtenir le premier « face » au k -ième lancer ?
3. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, il n'y ait jamais un résultat « pile » à la suite d'un résultat « face » ?

Exercice 20

On joue avec deux dés équilibrés, de la manière suivante : on lance successivement les deux dés à la fois, en on considère la somme des deux résultats. Si cette somme vaut 7 on gagne, si elle vaut 6 on perd, dans les autres cas on relance les dés.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de gagner au n -ième lancer (et pas avant) ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n de gagner en n coups ou moins.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité q_n de perdre en n coups ou moins.
4. Déterminer $\lim p_n$ et $\lim q_n$, et interpréter ces résultats.

Exercice 21 - Probabilités conditionnelles et relation de récurrence

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de deux pièces A et B ayant chacune un côté Pile et un côté Face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé : si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A ; si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B ; et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté Face. Pour tout entier naturel n , on note :

- A_n l'évènement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté Face » ;
- B_n l'évènement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, une pièce est du côté Pile et l'autre côté Face » ;
- C_n l'évènement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté Pile ».

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1 , b_1 et c_1 .
2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) \neq 0$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
3. Calculer b_2 .
4. Pour tout entier naturel n , exprimer c_n en fonction de a_n et b_n .
5. Soit $n \geq 2$. On admet que $b_n \neq 0$ et $c_n \neq 0$.
 - (a) Sans justifier, donner $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.
 - (b) Établir : $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$
 - (c) En déduire : $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$. Cette relation est-elle encore valable quand $n \in \{0; 1\}$?
6. Déterminer le terme général de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

3.2 Variables aléatoires

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable $Y = n - X$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Exercice 23

Soit $p \in]0; 1[$ et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(X > k)$.
2. En déduire que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $P_{[X > k]}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$.

Exercice 24 - Loi géométrique tronquée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On lance une pièce donnant Pile avec probabilité p , jusqu'à obtenir le premier Pile ; dans tous les cas, on s'arrête après le n -ième lancer. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1[, \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$.
2. Montrer que $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, et déterminer la loi de X .
3. Calculer l'espérance de X .
4. Écrire une fonction Python d'en-tête **def simulX(n,p)**, dont l'exécution simule l'expérience décrite et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

Exercice 25 - Urne de Pólya

On considère une urne contenant initialement N_1 boules blanches et N_2 boules noires, où $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$. On réalise des tirages successifs dans l'urne, avec le protocole suivant : à chaque étape, on replace la boule tirée dans l'urne, en y ajoutant une autre boule de la même couleur. Ainsi, à la fin de l'étape n , l'urne contiendra un total de $N_1 + N_2 + n$ boules.

On note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée à l'étape n est noire, et 0 si elle est blanche.

1. Les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont-ils indépendants ?
2. Montrer que $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0])$.
3. Plus généralement, montrer par récurrence la proposition suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $a_1, \dots, a_n \in \{0; 1\}$ et si

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \text{ alors :}$$

$$P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n]) = \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{n-1} (N_1 + N_2 + k)}.$$

Indication : On pourra distinguer deux cas dans l'hérédité selon la valeur de a_{n+1} .

Remarque : On a montré que la probabilité d'obtenir un tirage quelconque de n boules ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a obtenu ce tirage, mais simplement de s_n , le nombre total de boules noires obtenues. On dit dans ce cas que la loi des $(X_1, \dots, X_n)$ est *échangeable*.

3.3 Exercice de concours

Exercice 26 - Ecricome Appli 2024 (extrait de l'exercice 1)

La partie II est indépendante de la partie I. La partie III utilise des résultats de la partie I.

Partie I

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $R_X(k) = \mathbb{P}(X > k)$.

1. Soit p un réel dans $]0; 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .
 - (b) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
 - (a) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .
 - (b) En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N}, R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

3. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.
 - (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente, et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
4. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$.
 - (a) Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X + 1)$. En déduire que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
 - (b) Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}((X - 1)(X + 1))$. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.

On étudie la durée de vie d'un appareil, mesurée en années. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, pendant chaque année numéro k (où $k \in \mathbb{N}^*$), l'appareil a une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, pour tout entier naturel k non nul : si la machine n'est pas tombée en panne pendant l'année $k - 1$, alors elle tombera en panne lors de l'année k avec probabilité α_k , et elle continuera de fonctionner pendant toute l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$.

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil : si l'appareil tombe en panne pendant l'année k , sa durée de vie aura été égale à k .

5. Justifier que pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$.
6. En déduire que pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.
7. À l'aide de la partie I, en déduire une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier naturel k non nul, en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
8. **Étude de deux exemples :**
 - (a) Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p \in]0; 1[$. Reconnaître la loi de X .
 - (b) Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = \frac{k}{k+1}$. Déterminer la loi de X .