
CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISIONS – ÉTÉ 2026

Table des matières

1	Analyse	2
1.1	Études de fonctions	2
1.2	Études de suites	6
1.3	Exercice de concours	12
2	Algèbre	14
2.1	Espaces vectoriels, familles de vecteurs	14
2.2	Applications linéaires et matrices	20
2.3	Exercice de concours	24
3	Probabilités	28
3.1	Probabilités, indépendance, conditionnement	28
3.2	Variables aléatoires	31
3.3	Exercice de concours	34

1 Analyse

1.1 Études de fonctions

Exercice 1 - Démonstration d'inégalités

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

On démontre ces deux inégalités **séparément**. Pour chacune d'elle, on étudie les variations de la différence des deux membres, pour en déduire son signe.

- Pour $x > -1$, on pose $f(x) = x - \ln(x+1)$. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour $x > -1$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-1	0	
$x+1$	0	+	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		0	

On a indiqué la valeur $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$. Ainsi, pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$ donc $x \geq \ln(x+1)$.

Remarque : On aurait aussi pu justifier cette inégalité à l'aide d'un argument de **concavité** pour la fonction $\ln$. En effet, la courbe représentative de $x \mapsto \ln(x+1)$ se situe en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, i.e. $\ln(x+1) \leq x$.

- De la même manière, pour $x > -1$ on pose $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et : pour tout $x > -1$, $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} \geq 0$. Ainsi g est croissante sur $]-1; +\infty[$, donc pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, i.e. $\ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

Remarque : En revanche, pour $x \in]-1; 0[$, $g(x) < 0$ donc $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - 1 \leq x \ln x$.

On procède de même : pour $x > 0$, posons $h(x) = x \ln(x) - x + 1$. C'est une fonction dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour $x > 0$: $h'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	
$h'(x)$		-	+
$h(x)$		0	

On a indiqué $h(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $h(x) \geq 0$ donc $x \ln(x) \geq x - 1$.

Remarque : Ici on aurait aussi pu utiliser la **convexité** de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$, pour affirmer que sa courbe représentative se situe au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 2 - Deux fonctions classiques

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.

Le domaine de définition de ch et sh est $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x) \quad \text{et} \quad \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x).$$

Ainsi ch est paire et sh est impaire.

2. Déterminer le signe de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$. Pour sh, on résout l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) \geq 0 &\iff e^x - e^{-x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \\ &\iff x \geq -x \quad (\text{car la fonction exponentielle est strictement croissante}) \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi sh est positive sur $[0; +\infty[$ et négative sur $] -\infty; 0]$.

3. Étudier le sens de variation de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions ch et sh sont dérivables comme sommes de fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x), \quad \text{et} \quad \text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \text{ch}(x).$$

D'après la question précédente, on en déduit les variations suivantes pour ces deux fonctions :

x	0
sh(x)	− 0 +
ch(x)	↘ 1 ↗

x	0
ch(x)	+ 0 +
sh(x)	↗ 0 ↘

On a indiqué les valeurs $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{sh}(0) = 0$.

4. Déterminer les tangentes en 0 aux courbes de chacune de ces fonctions.

Puisque $\text{ch}(0) = 1$ et $\text{ch}'(0) = 0$, donc la tangente à la courbe de ch en 0 a pour équation : $y = 1$.

De même $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{sh}'(0) = 1$, donc la tangente à la courbe de sh en 0 a pour équation : $y = x$.

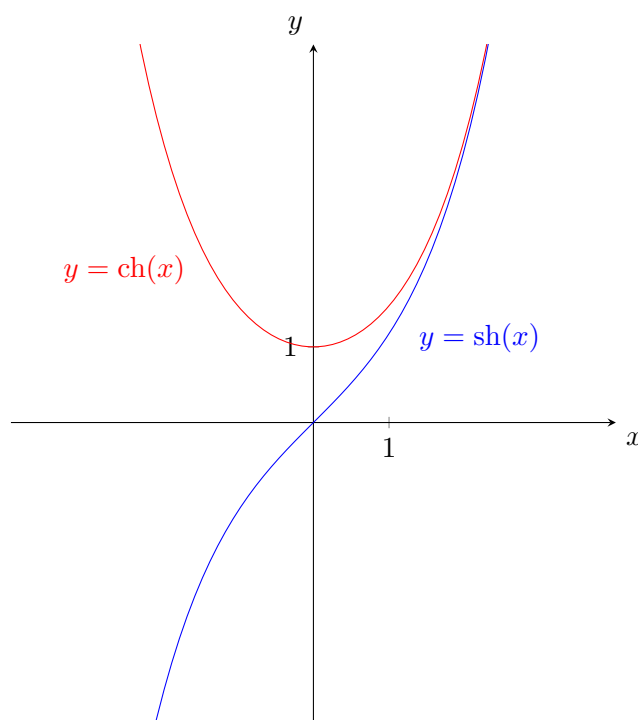
5. Étudier la convexité de ces fonctions.

On étudie le signe de la dérivée seconde de ces fonctions.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}''(x) = \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$. Ainsi la fonction ch est convexe.

De la même manière, pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}''(x) = \text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$. Sur $\mathbb{R}_+$, sh est positive, elle est donc convexe. De même, sur $\mathbb{R}_-$, elle est concave. En particulier, le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe de sh.

6. Tracer les représentations graphiques de ces fonctions.



Exercice 3 - Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right).$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \text{ donc } \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0 \text{ (par continuité de } \ln).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1}.$

$$\frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}. \text{ Or } \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \text{ et } \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées. Finalement, par produit, } \frac{\ln(x)}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque : On a en fait montré que le dénominateur est équivalent à x en $+\infty$, pour se ramener à $\frac{\ln(x)}{x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - \ln x}{e^x - 1}.$

$$x^2 + 1 - \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \text{ et } e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+. \text{ Ainsi, par quotient : } \frac{x^2 + 1 - \ln x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}.$

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \text{ par quotient.}$$

Remarque : Ici encore, cela revient à trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur.

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}.$

$$x^2 - 5x + 4 \xrightarrow{x \rightarrow -1} 10 \text{ et } x^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -1} 0. \text{ On distingue donc les limites à gauche et à droite :}$$

- $x^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} 0^+$ donc $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} +\infty.$
- $x^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 0^-$ donc $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} -\infty.$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}.$

Le numérateur et le dénominateur sont des polynômes qui s'annulent en 1, on peut donc les factoriser par $x - 1$:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4) \quad \text{et} \quad x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

$$\text{Finalement : } \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1} = \frac{x - 4}{x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{3}{2}.$$

Remarque : On peut utiliser cette forme simplifiée pour retrouver le résultat de la question précédente.

7. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(6 - x)^7 - 1}{x - 5}.$

On reconnaît le taux d'accroissement en 5 de $f : x \mapsto (6 - x)^7$. Puisque f est dérivable avec $f'(x) = -7(6 - x)^6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\frac{(6 - x)^7 - 1}{x - 5} = \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \xrightarrow{x \rightarrow 5} f'(5) = -7.$$

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}.$

On reconnaît le taux d'accroissement en 2 de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{2x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ pour $x > 0$. Ainsi :

$$\frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2} = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} g'(2) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Remarque : On peut aussi simplifier le numérateur avec la méthode de la quantité conjuguée, comme dans les questions qui suivent.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}.$

On simplifie cette expression avec la méthode de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} &= \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{(x+5) - (x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x.$

Avec la méthode de la quantité conjuguée :

$$\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x = \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}.$$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - x + 1} - 5x.$

On pourrait encore utiliser la méthode de la quantité conjuguée, mais il suffit de factoriser par x :

$$\sqrt{9x^2 - x + 1} - 5x = 3x\sqrt{1 - \frac{1}{9x} + \frac{1}{9x^2}} - 5x = x\left(3\sqrt{1 - \frac{1}{9x} + \frac{1}{9x^2}} - 5\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

par produit, car $3\sqrt{1 - \frac{1}{9x} + \frac{1}{9x^2}} - 5 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2.$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$

On utilise l'écriture exponentielle : $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$. Or $\frac{1}{x} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Ainsi, par continuité de la fonction exponentielle : $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1.$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

On peut utiliser la même méthode qu'à la question précédente, mais on remarque plutôt qu'on peut s'y ramener par un changement de variables : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{y}} = 1.$

Exercice 4 - Dérivabilité d'un prolongement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Tout d'abord, f est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, comme produit et composée de fonctions continues. Vérifions si f est également continue en 0 :

- puisque $-\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, alors $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Ainsi, par produit, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = f(0)$, donc f est **continue à droite** en 0.
- pour la limite à gauche de 0, on utilise un changement de variables pour reconnaître des croissances comparées : on posant $u = -\frac{1}{x}$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u} e^u = -\infty.$$

Ainsi f n'a pas de limite finie en 0^- , elle n'est donc **pas continue à gauche** en 0.

Finalement f n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

Sur $\mathbb{R}^*$, f est bien dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables, et pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

3. f est-elle dérivable sur $[0; +\infty[$?

D'après la question précédente, f est bien dérivable sur $]0; +\infty[$. Il reste donc à vérifier si elle est dérivable à droite en 0, en étudiant son taux d'accroissement : pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Ainsi f est bien dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0) = 0$. Finalement elle est bien dérivable sur tout $[0; +\infty[$.

1.2 Études de suites

Exercice 5 - Produit et encadrement

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Voir l'exercice 1.

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

On va encadrer $\ln(u_n)$, à l'aide des propriétés de la fonction $\ln$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Or d'après la question précédente, pour $k \in [1; n]$, $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$. En sommant ces encadrements membre-à-membre, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}, \quad i.e. \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k.$$

Or on connaît les expressions des sommes ci-dessus, ainsi :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

et de même,

$$\frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »), on en déduit donc que $\lim \ln(u_n) = \frac{1}{2}$. En utilisant la continuité de la fonction exponentielle, on en déduit donc que $\lim u_n = \lim e^{\ln(u_n)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercice 6 - Suite implicite de type $f(u_n) = n$

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, elle est donc continue. De plus, pour $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, ainsi f est strictement croissante. Enfin, par somme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.

2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution que l'on notera x_n .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, f est une bijection de $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, or $n \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique réel $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$. Autrement dit, x_n est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$.

- (b) Calculer x_1 . Étudier la monotonie et la convergence de (x_n) .

Le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = 1$. Or on vérifie que 1 est solution de cette équation, puisque : $1 + \ln(1) = 1$. Puisque cette solution est unique, on en déduit que $x_1 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comparons x_n et x_{n+1} , ou plutôt $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En effet, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$, donc $f(x_n) < f(x_{n+1})$. Or f est strictement croissante, on en déduit donc que $x_n < x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que la suite (x_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on sait qu'il n'y a alors que deux possibilités pour la limite de (x_n) : soit elle converge vers un réel ℓ , soit elle tend vers $+\infty$. On va montrer par l'absurde qu'on est dans le deuxième cas.

Supposons que $\lim x_n = \ell \in \mathbb{R}$, notamment $\ell \geq x_1 = 1$ puisque (x_n) est croissante. Alors $\lim f(x_n) = f(\ell)$ puisque f est continue sur $]0; +\infty[$ et que $\ell > 0$. Or $f(x_n) = n$, donc $\lim f(x_n) = +\infty$. On obtient une contradiction, donc (x_n) n'a pas de limite finie, ainsi $\lim x_n = +\infty$.

Remarque : On aurait aussi pu écrire $x_n = f^{-1}(n)$, et justifier les variations et les limites de f^{-1} .

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, comparer $f(n)$ et n . En déduire que $x_n \leq n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n + \ln(n) \geq n$. Autrement dit $f(n) \geq f(x_n)$, et puisque f est strictement croissante, $n \geq x_n$.

- (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $n - \ln n \leq x_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $x_n \leq n$, donc $\ln(x_n) \leq \ln(n)$ puisque $\ln$ est croissante. Or :

$$n = f(x_n) = x_n + \ln(x_n) \leq x_n + \ln(n), \quad \text{donc} \quad n - \ln(n) \leq x_n.$$

- (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

D'après les deux questions précédentes, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n - \ln(n) \leq x_n \leq n$. Ainsi $1 - \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$, où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Remarque : Autrement dit, on a montré que $x_n \sim n$.

Exercice 7 - Suite implicite de type $f_n(u_n) = 0$

Pour $n \geq 1$, on note $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ et on considère l'équation (E_n) : $P_n(x) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, (E_n) admet une unique solution a_n dans $[0; 1]$.

Soit $n \geq 1$. La fonction P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, elle est donc également continue.

De plus, pour $x \in [0; 1]$, $P'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^n kx^{k-1} > 0$, donc P_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.

Enfin $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = n$.

D'après le théorème de la bijection, puisque $1 \in [0; n]$, il existe un unique réel $a_n \in [0; 1]$ tel que $P_n(a_n) = 1$, autrement dit a_n est l'unique solution de (E_n) sur $[0; 1]$.

2. Calculer a_1 et a_2 .

Pour $n = 1$, l'équation (E_1) est : $x = 1$. Son unique solution est donc $a_1 = 1$.

Pour $n = 2$, l'équation (E_2) s'écrit : $x + x^2 = 1$, i.e. $x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 5$, et ses solutions sont $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Seule cette deuxième solution est dans $[0; 1]$, donc

$$a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

3. Comparer $P_{n+1}(a_n)$ et $P_{n+1}(a_{n+1})$. En déduire que la suite (a_n) est monotone, et qu'elle converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $P_{n+1}(a_{n+1}) = 1$. De plus :

$$P_{n+1}(a_n) = \sum_{k=1}^{n+1} a_n^k = \sum_{k=1}^n a_n^k + a_n^{n+1} = P_n(a_n) + a_n^{n+1} = 1 + a_n^{n+1}.$$

Puisque $a_n \geq 0$, on en déduit que $P_{n+1}(a_n) \geq P_{n+1}(a_{n+1})$. Or la fonction P_n est strictement croissante d'après la question 1, donc $a_n \geq a_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que la suite (a_n) est décroissante.

De plus (a_n) est à valeurs dans $[0; 1]$, notamment elle est minorée. Par théorème de la limite monotone, on en déduit que (a_n) converge vers une limite $\ell \in [0; 1]$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < a_n \leq a_2 < 1$. En déduire la limite de la suite (a_n) .

On a montré dans la question précédente que (a_n) est décroissante, ainsi pour $n \geq 2$, $a_n \leq a_2$. De plus on a montré dans la question 2 que $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ (car $\sqrt{5} < 3$).

Revenons maintenant à l'équation vérifiée par a_n , et tentons de « passer à la limite ». Pour $n \geq 2$, $P_n(a_n) = 1$, où $P_n(a_n) = \sum_{k=1}^n a_n^k = a_n \frac{1 - a_n^n}{1 - a_n}$ (valable car $a_n \neq 1$). Or d'après ce qui précède : $0 \leq a_n \leq a_2$, donc $0 \leq a_n^n \leq a_2^n$. Puisque $a_2 \in [0; 1]$, $\lim a_2^n = 0$, donc par encadrement, $\lim a_n^n = 0$. On en déduit finalement que $\lim P_n(a_n) = \lim a_n \frac{1 - a_n^n}{1 - a_n} = \frac{\ell}{1 - \ell}$, où $P_n(a_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Finalement, $\frac{\ell}{1 - \ell} = 1$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 - Suite définie par récurrence (méthode générale)

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{x^3 + 6x}{3x^2 + 2}$

1. Déterminer le tableau de variations de f .

Pour $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 2 \geq 2 > 0$, donc $f(x) = \frac{x^3 + 6x}{3x^2 + 2}$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales (c'est une *fraction rationnelle*), et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6)(3x^2 + 2) - (x^3 + 6x)6x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 + 12}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{3(x^2 - 2)^2}{(3x^2 + 2)^2} \geq 0.$$

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$. On peut déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$, en effet :

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 + \frac{6}{x^2}\right)}{3x^2 \left(1 + \frac{2}{3x^2}\right)} = \frac{x}{3} \times \frac{1 + \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{2}{3x^2}}, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Finalement, le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. Étudier le signe de $f(x) - x$. En déduire les points fixes de f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = \frac{x^3 + 6x - x(3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} = \frac{-2x^3 + 4x}{3x^2 + 2} = \frac{-2x(x^2 - 2)}{3x^2 + 2}.$$

Puisque $3x^2 + 2 > 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $-2x(x^2 - 2) = -2x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Dressons son tableau de signe :

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$-2x$	+	0	-
$x - \sqrt{2}$	-	0	+
$x + \sqrt{2}$	-	0	+
$f(x) - x$	+	0	-

Notamment, les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$, i.e. $f(x) - x = 0$. Ainsi, les points fixes de f sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

3. Que dire de la suite dans le cas où $u_0 = 0$? Où $u_0 = -\sqrt{2}$? Où $u_0 = \sqrt{2}$?

Supposons que $u_0 = 0$. Puisque 0 est un point fixe de f , on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

- **Initialisation** : Au rang 0 , $u_0 = 0$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = 0$, alors : $u_{n+1} = f(u_n) = f(0) = 0$.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

De la même manière, si u_0 est l'un des deux autres points fixes de f (qui sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$), alors u_n est constamment égal à ce point fixe.

4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; \sqrt{2}[$.

- (a) Montrer que pour tout n , $u_n \in]0; \sqrt{2}[$.

D'après la question 1, pour tout $x \in]0; \sqrt{2}[$, $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{2}[$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; \sqrt{2}[$.

- **Initialisation** : Au rang 0 , $0 < u_0 < \sqrt{2}$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < \sqrt{2}$. Alors puisque f est strictement croissante sur $]0; \sqrt{2}[$, $f(0) < f(u_n) < f(\sqrt{2})$, i.e. $0 < u_{n+1} < \sqrt{2}$.
- **Conclusion** : Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \sqrt{2}$.

Remarque : On dit que l'intervalle $]0; \sqrt{2}[$ est *stable* par f .

- (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; \sqrt{2}[$. Alors d'après la question 2, $f(u_n) - u_n \geq 0$, i.e. $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) est croissante.

- (c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$, donc elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On sait aussi que $u_0 \leq \ell \leq \sqrt{2}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $\lim u_{n+1} = \ell$ et $\lim f(u_n) = f(\ell)$, car la fonction f est continue. On en déduit que $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f . Puisque les points fixes de f sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$, et que $0 < u_0 \leq \ell \leq \sqrt{2}$, on en déduit que $\ell = \sqrt{2}$.

5. Reprendre l'étude de la question précédente dans le cas où $u_0 > \sqrt{2}$, puis dans le cas où $u_0 < 0$.

- Si $u_0 > \sqrt{2}$: De même qu'en 4.(a), on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$. À l'aide de la question 2, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leq 0$, et donc que (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est minorée par $\sqrt{2}$, elle converge vers une limite $\ell \geq \sqrt{2}$, qui doit être un point fixe de f (de même qu'en 4.(c)). Ainsi $\lim u_n = \sqrt{2}$.
- Si $u_0 < 0$: Il faut distinguer deux cas, si $u_0 < -\sqrt{2}$ ou si $u_0 \in]-\sqrt{2}; 0[$ (le cas $u_0 = -\sqrt{2}$ a déjà été traité à la question 3). On traite ces cas de même que précédemment : les intervalles $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et $]-\sqrt{2}; 0[$ sont stables par f , et on utilise la question 2 pour déterminer la monotonie de (u_n) dans chacun des deux cas. On peut ensuite conclure que la limite existe, que c'est un point fixe de f , et que c'est nécessairement $-\sqrt{2}$.

Exercice 9 - Récurrence et accroissements finis

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

1. (a) Montrer que f est paire. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{-2x} \times e^x}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} = f(x).$$

La fonction f est donc bien paire. De plus :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}.$$

Ainsi $f'(x)$ a le signe de $1 - e^{2x}$, donc :

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - e^{2x} \geq 0 \iff e^{2x} \leq 1 \iff x \leq 0,$$

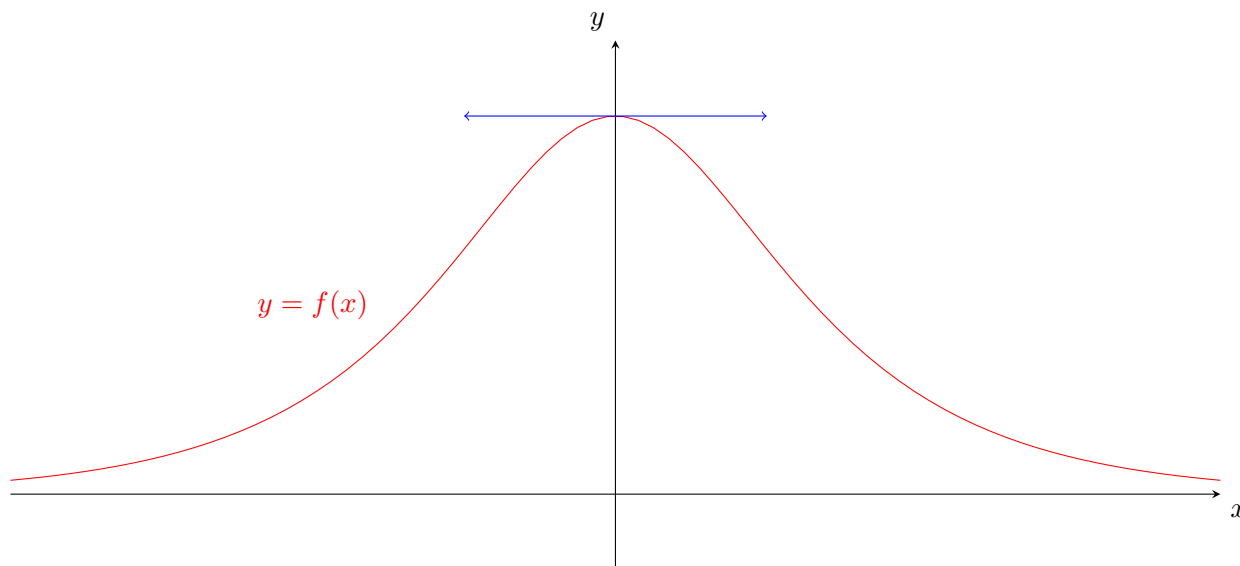
puisque la fonction exponentielle est strictement croissante. On obtient finalement le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0

On a indiqué les valeurs et limites suivantes :

- $f(0) = \frac{1}{2}$;
- $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; puisque f est paire, on en déduit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

On peut en déduire l'allure de la courbe représentative de f , notamment avec l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $\pm\infty$, et la tangente en 0 d'équation $y = \frac{1}{2}$.



Pour faire un dessin plus précis, on pourrait chercher les coordonnées des points d'inflexion de la courbe.

- (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ (on pourra étudier $g : x \mapsto f(x) - x$). Justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$).

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$, montrons que g est strictement décroissante. Puisque $g'(x) = f'(x) - 1$, alors :

- pour $x \geq 0$: $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) \leq -1 < 0$;
- pour $x < 0$: $0 < e^x < 1$, $0 < 1 - e^{2x} < 1$, et $0 < \frac{1}{(e^{2x}+1)^2} < 1$. On en déduit bien que $f'(x) < 1$, donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

Remarque : On n'aurait pas besoin de ce calcul si on avait déjà montré la majoration de la question suivante.

Ainsi g est continue et strictement décroissante, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Notamment, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution ℓ .

De plus $g(0) = f(0) = \frac{1}{2}$ et $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé (à retrouver avec les variations de f). Ainsi $g(0) > g(\ell) > g(\frac{1}{2})$, or g est strictement décroissante, donc $0 < \ell < \frac{1}{2}$.

- (c) Montrer que, pour tout réel x , $|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

D'après les variations de f obtenues à la question 1.(a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{1}{2}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| = \left| f(x) \times \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right| = f(x) \left| \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right|.$$

Posons donc $h(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et montrons donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq 1$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \frac{-2e^{2x}(1+e^{2x}) - (1-e^{2x})2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} < 0.$$

La fonction h est donc strictement décroissante, et :

$$h(x) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^{2x}(e^{-2x}-1)}{e^{2x}(e^{-2x}+1)} = \frac{-1+e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1.$$

Le tableau de variations de h est donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	1	-1

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in]-1; 1[$ donc $|h(x)| \leq 1$.

Finalement, on a bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|f'(x)| = |h(x)f(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.

La fonction f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, et d'après la question 1.(c) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|, \quad \text{i.e.} \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Montrons cette proposition par récurrence sur n .

- Au rang 0, $|u_0 - \ell| = |0 - \ell| = \ell \leq \frac{1}{2}$ d'après la question 1.(b).
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Alors d'après la question 2.(a) :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

- Par principe de récurrence, on a bien démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$. Par encadrement, on en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \ell| = 0$, autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

(d) Écrire un script Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

D'après la question précédente, le terme u_n est une valeur approchée de ℓ à $\frac{1}{2^{n+1}}$ près. Il suffit donc de déterminer le premier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$: puisque $2^{10} = 1024 > 1000$, alors $\frac{1}{2^{10}} < 10^{-3}$. On veut donc calculer le terme u_9 .

Pour cela on utilise une boucle **for** qui calcule successivement les valeurs de chaque terme à partir du précédent. Pour plus de lisibilité, on peut commencer par définir séparément la fonction **f**.

```

1 import numpy as np

def f(x):
    return np.exp(x)/(np.exp(2*x)+1)

5 u = 0
  for k in range(1,10) :
    u = f(u)

10 print(u)
```

1.3 Exercice de concours

Exercice 10 - EDHEC ECE 2022 (ex3)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par : $\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n .

La fonction f_n est dérivable sur $[0; 1]$ comme quotient de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in [0; 1], f'_n(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0.$$

Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$, avec $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{1}{n+1}$. On en déduit finalement le tableau de variations ci-dessous :

x	0	1
$f_n(x)$	0	$\frac{1}{n+1}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$. Montrer que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in [0; 1], 0 \leq \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{n+1}$, donc $0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Ainsi :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx, \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} \geq 0$, d'après la question précédente. Ainsi

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien croissante.

(b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et en déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$. Ainsi d'après la question 2, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On en déduit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1,$$

en reconnaissant une somme télescopique. On a donc bien montré que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

(c) Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, qu'on notera γ , et justifier que $0 \leq \gamma \leq 1$.

D'après les questions précédentes, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers une limite notée γ , où $\gamma \leq 1$.

De plus $S_1 = u_1 \geq 0$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, donc $\gamma \geq S_1 \geq 0$.

4. (a) Déterminer deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : pour tous $x \in [0; 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$. En déduire une expression de l'intégrale u_k .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in [0; 1], \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{a(x+k)-bk}{k(x+k)} = \frac{ax+(a-b)k}{k(x+k)}$. Ainsi, pour $a = 1$ et $a - b = 0$, i.e. pour $a = b = 1$, on vérifie que : $\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x}{k(x+k)}$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Notamment :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{k} - \int_0^1 \frac{dx}{x+k} \\ &= \frac{1}{k} - \left[\ln(x+k) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1). \end{aligned}$$

- (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + (\ln(1) - \ln(n+1)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1), \end{aligned}$$

en reconnaissant ici encore une somme télescopique.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Quelle est sa limite ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente : $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Or $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$, et $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$ (par continuité de $\ln$). Par somme, on en déduit donc que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$.

- (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.

Pour tout $x \in [n; n+1]$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$, donc :

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{n}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

Remarque : On aurait aussi pu montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ (c'est une inégalité de concavité), et l'appliquer pour $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$; ou encore utiliser l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $\ln$.

Finalement, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1} - T_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0,$$

d'après l'inégalité démontrée ci-dessus. Ainsi $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- (c) Déterminer un encadrement de γ faisant intervenir S_n et T_n .

D'après les résultats des questions précédentes, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ , et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ . Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \leq \gamma \leq T_n$.

6. On peut utiliser les termes S_n pour obtenir une approximation de γ .

- (a) Donner une expression de $T_n - S_n$.

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, T_n - S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

- (b) Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Puisque $S_n \leq \gamma \leq T_n$, l'écart entre γ et S_n est inférieur à $T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$. On peut donc calculer les termes successifs de S_n jusqu'à atteindre un n tel que $\ln(n+1) - \ln(n) \leq 10^{-3}$. D'après la question 5.(b), ce sera notamment le cas si $n = 10^{-3}$. Pour calculer S_n , on utilise la formule suivante : $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln(n)$.

```
1 n = 1
  s = 1-log(2)
  while n < 10**3 :
      n = n+1
5      s = s + 1/n +log(n-1) -log(n)
  print(s)
```

Remarque : Pour pouvoir utiliser la fonction `log`, il faudrait d'abord l'importer à l'aide de la commande : `from math import log`. En réalité, on utilisera plus souvent les fonctions du module `numpy`.

2 Algèbre

2.1 Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Exercice 11 - S.e.v., base, dimension

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$.

Il est clair que F_1 est une partie de $\mathbb{R}^3$, montrons que c'en est un sous-espace vectoriel.

- Tout d'abord, $0_{\mathbb{R}^3} \in F_1$, puisque $0 + 2 \times 0 = 0$.
- Soient $(x, y, z), (a, b, c) \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}^3$, alors $(x, y, z) + \lambda(a, b, c) = (x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)$, où :

$$(x + \lambda a) + 2(y + \lambda b) = x + 2y + \lambda(a + 2b) = 0,$$

puisque $x + 2y = 0$ et $a + 2b = 0$. Ainsi $(x, y, z) + \lambda(a, b, c) \in F_1$.

On a montré que F_1 est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Pour en déterminer une base, on résout le système (à une seule équation) qui définit F_1 :

$$(x, y, z) \in F_1 \iff x + 2y = 0 \iff x = -2y \iff (x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Ainsi $F_1 = \text{Vect}((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$, i.e. la famille $((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$ est génératrice de F_1 . De plus c'est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre, et il s'agit finalement d'une base de F_1 . On en déduit que $\dim(F_1) = 2$.

2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = 0 \text{ et } -x - 4y + 2z = 0\}$.

Il est clair que F_2 est une partie de $\mathbb{R}^3$, montrons que c'en est un sous-espace vectoriel.

- Tout d'abord, $0_{\mathbb{R}^3} \in F_2$, puisque $0 + 5 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ et $-0 - 4 \times 0 + 2 \times 0 = 0$.
- Soient $(x, y, z), (a, b, c) \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^3$, alors $(x, y, z) + \lambda(a, b, c) = (x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)$, où :

$$(x + \lambda a) + 5(y + \lambda b) - 3(z + \lambda c) = x + 5y - 3z + \lambda(a + 5b - 3c) = 0,$$

puisque $x + 5y - 3z = 0$ et $a + 5b - 3c = 0$. De la même manière, $-(x + \lambda a) - 4(y + \lambda b) + 2(z + \lambda c) = 0$.

Ainsi $(x, y, z) + \lambda(a, b, c) \in F_2$.

On a montré que F_2 est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc bien un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Pour en déterminer une base, on résout le système qui définit F_2 :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F_2 &\iff \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2} \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \iff (x, y, z) = (-2z, z, z) = z(-2, 1, 1). \end{aligned}$$

Ainsi $F_2 = \text{Vect}((-2, 1, 1))$, i.e. la famille $((-2, 1, 1))$ est génératrice de F_2 . De plus c'est une famille formée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre, et il s'agit finalement d'une base de F_2 . On en déduit que $\dim(F_2) = 1$.

3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P'(1) = 0\}$.

Montrons que F_3 est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[x]$:

- Il est clair que $F_3 \subset \mathbb{R}_3[x]$.
- Si P est le polynôme nul, alors P' aussi, donc $P'(1) = 0$. Ainsi le polynôme nul appartient à F_3 .
- Soient $P, Q \in F_3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(P + \lambda Q)'(1) = (P' + \lambda Q')(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0,$$

puisque $P'(1) = Q'(1) = 0$. Ainsi $P + \lambda Q \in F_3$.

Finalement F_3 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[x]$. Pour en chercher une base, on va se ramener à la résolution d'un système. Soit $P : x \mapsto p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$, alors pour $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2$, ainsi :

$$\begin{aligned} P \in F_3 &\iff P'(1) = 0 \iff p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0 \iff p_1 = -2p_2 - 3p_3 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = p_0 + (-2p_2 - 3p_3)x + p_2x^2 + p_3x^3 = p_0 + p_2(x^2 - 2x) + p_3(x^3 - 3x) \\ &\iff P = p_0Q_0 + p_2Q_2 + p_3Q_3, \end{aligned}$$

en notant $Q_0 : x \mapsto 1$, $Q_2 : x \mapsto x^2 - 2x$ et $Q_3 : x \mapsto x^3 - 3x$. On a montré que $F_3 = \text{Vect}(Q_0, Q_2, Q_3)$, autrement dit (Q_0, Q_2, Q_3) est une famille génératrice de F_3 . De plus elle est libre car c'est une famille de polynômes de degrés deux-à-deux distincts, il s'agit donc d'une base de F_3 . En particulier, $\dim(F_3) = 3$.

$$4. F_4 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)P'(x) - xP''(x) = 2P(x)\}.$$

Montrons que F_4 est un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[x]$:

- Il est clair que $F_4 \subset \mathbb{R}_2[x]$.
- Si P est le polynôme nul, alors P' et P'' aussi, donc pour $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)P'(x) - xP''(x) = 0 = 2P(x)$. Ainsi le polynôme nul appartient à F_4 .
- Soient $P, Q \in F_4$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x-1)(P + \lambda Q)'(x) - x(P + \lambda Q)''(x) &= (x-1)P'(x) + \lambda(x-1)Q'(x) - xP''(x) - \lambda xQ''(x) \\ &= (x-1)P'(x) - xP''(x) + \lambda((x-1)Q'(x) - xQ''(x)) \\ &= 2P(x) + \lambda 2Q(x) = 2(P + \lambda Q)(x) \end{aligned}$$

Ainsi $P + \lambda Q \in F_4$.

Finalement F_4 est bien un s.e.v. de $\mathbb{R}_2[x]$. On en cherche une base, en se ramenant à la résolution d'un système. Soit $P : x \mapsto p_0 + p_1x + p_2x^2$, alors pour $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = p_1 + 2p_2x$ et $P''(x) = 2p_2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P \in F_4 &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(p_1 + 2p_2x) - x(2p_2) = 2(p_0 + p_1x + p_2x^2) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -p_1 + (p_1 - 4p_2)x + 2p_2x^2 = 2p_0 + 2p_1x + 2p_2x^2 \\ &\iff \begin{cases} -p_1 &= 2p_0 \\ p_1 - 4p_2 &= 2p_1 \\ 2p_2 &= 2p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} p_0 &= 2p_2 \\ p_1 &= -4p_2 \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2p_2 - 4p_2x^2 + p_2x^2 = p_2(2 - 4x + x^2) \end{aligned}$$

Ainsi, en notant $R : x \mapsto x^2 - 4x + 2$, on a montré que $F_4 = \text{Vect}(R)$. Ainsi la famille (R) est génératrice de F_4 , ainsi que libre puisque formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de F_4 , de sorte que $\dim(F_4) = 1$.

$$5. F_5 = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \text{ l'ensemble des matrices symétriques de taille } 2 \times 2.$$

On peut directement écrire F_5 comme un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par une famille de vecteurs. En effet, une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dans F_5 si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $F_5 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, notamment F_5 est bien un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifions

que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, qui est génératrice de F_5 , est également libre : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on vérifie bien que $a = b = c = 0$. Ainsi cette famille est bien libre, c'est donc une base de F_5 , de sorte que $\dim(F_5) = 3$.

$$6. F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

De même que dans la question précédente :

$$M \in F_6 \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $F_6 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, c'est bien un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Vérifions que la

famille qui l'engendre est libre : si $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifient $a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$,

alors $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $a = b = c = 0$.

Finalement $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F_6 , de sorte que $\dim(F_6) = 3$.

7. $F_7 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$, où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ fixés.

On vérifie que $F_7 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et que la matrice nulle 0_2 appartient à F_7 , puisque $0_2 N = 0_2 = N 0_2$. Enfin, si $M_1, M_2 \in F_7$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$(M_1 + \lambda M_2)N = M_1 N + \lambda M_2 N = N M_1 + \lambda N M_2 = N(M_1 + \lambda M_2),$$

ainsi $M_1 + \lambda M_2 \in F_7$. On a donc bien montré que F_7 est un s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} M \in F_7 &\iff MN = NM \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_2 b = \lambda_1 b \\ \lambda_1 c = \lambda_2 c \end{cases} \end{aligned}$$

Pour pouvoir résoudre le système, il faut distinguer deux cas :

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$: alors les équations ci-dessus sont toujours vérifiées, ainsi $F_7 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, dans ce cas N est une matrice scalaire, i.e. de la forme $N = \lambda_1 I_2$, et commute donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Une base de F_7 est par exemple la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$; de plus $\dim(F_7) = 4$.

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$: en reprenant le système ci-dessus,

$$\begin{aligned} M \in F_7 &\iff \begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)b = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)c = 0 \end{cases} \iff b = c = 0 \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi $F_7 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Cette famille génératrice de F_7 est formée de deux matrices non colinéaires, donc elle est libre. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F_7 , de sorte que $\dim(F_7) = 2$. Dans ce cas, F_7 est donc l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12 - Matrice de passage

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $aA + bB + cC + dD = 0_2$, alors :

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d & 2b+2c+2d \\ 3c+3d & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i.e. \quad \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ b+c+d = 0 \\ c+d = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

On en déduit bien que $a = b = c = d = 0$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre, de plus son cardinal est 4, qui est la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Finalement $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

Notons $\mathcal{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = E_1$, $B = E_1 + 2E_2$, $C = E_1 + 2E_2 + 3E_3$ et $D = E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 4E_4$, de sorte que :

$$P = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Justifier l'inversibilité de P et déterminer son inverse.

P est une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont tous non nuls, donc P est bien inversible. Pour déterminer P^{-1} , on utilise la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4 \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{array} \right. \\ L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - L_2 \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{array} \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ directement (sans utiliser la matrice de passage).

On résout le système suivant, d'inconnues $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M = aA + bB + cC + dD &\iff \begin{pmatrix} a+b+c+d & 2b+2c+2d \\ 3c+3d & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c+d = 6 \\ 2b+2c+2d = 4 \\ 3c+3d = 4 \\ 4d = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+b+c+d = 6 \\ b+c+d = 2 \\ c+d = \frac{4}{3} \\ d = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \xleftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \\ \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_4} \end{array} \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice des coordonnées de M dans $\mathcal{B}$ est : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Retrouver le résultat en utilisant la matrice de passage.

D'après les règles de changement de base, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(M)$. Or la matrice des coordonnées de M

dans la base canonique est $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(M) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. De plus : $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} = P^{-1}$. Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Introduction à la diagonalisation

On considère $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Pour tout réel λ , on note $E_{\lambda}(A)$ l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.

Tout d'abord $E_3(A)$ est bien une partie de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, qui n'est pas vide car elle contient le vecteur nul $0_{3,1}$: en effet $A \times 0_{3,1} = 0_{3,1} = 3 \times 0_{3,1}$. Soient $X, Y \in E_3(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $X + \lambda Y \in E_3(A)$:

$$A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = 3X + \lambda 3Y = 3(X + \lambda Y).$$

Ainsi $E_3(A)$ est bien stable par combinaison linéaire, finalement c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) &\iff AX = 3X \iff \begin{cases} -2x - 2y + z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ x - 2y - 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \\ -5x - 2y + z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1} \begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ -6y - 12z = 0 \\ -12y - 24z = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2, L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, L_3 \leftarrow L_3 + 12L_2} \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, il est engendré par une famille formée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre et c'est une base de $E_3(A)$. Notamment, $\dim(E_3(A)) = 1$.

2. Justifier que $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.

De même que dans la question précédente, on montre que $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De plus, avec les mêmes notations pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in E_{-3}(A) \iff AX = -3X \iff \begin{cases} -2x - 2y + z = -3x \\ -2x + y - 2z = -3y \\ x - 2y - 2z = -3z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $E_{-3}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, il est engendré par une famille formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est donc libre et c'est une base de $E_{-3}(A)$. Notamment, $\dim(E_{-3}(A)) = 2$.

3. Montrer que la **concaténation** des bases trouvées dans les questions 1 et 2 forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.

Notons $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, montrons que c'est une famille libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, alors :

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -2a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \iff \begin{cases} 2b - 2c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} 3b = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Ainsi $\mathcal{B}'$ est bien une famille libre, or son cardinal est 3, qui est la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On en déduit bien que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Par définition d'une matrice de passage,

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

On sait que $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P^{-1}$. On calcule donc P^{-1} avec la méthode de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \sim \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \sim \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array} \right) \begin{array}{c} \sim \\ L_3 \leftarrow \frac{5}{6}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{array} \right) \begin{array}{c} \sim \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{5}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{5}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{array} \right)$$

$$\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Calculer $P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Remarque : Si on note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $f(X) = AX$, alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, et d'après les formules de changement de base, $P^{-1}AP = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. En notant $\mathcal{B}' = (U, V, W)$, on vérifie bien que $f(U) = 3U$, $f(V) = -3V$ et $f(W) = -3W$. On dira que 3 et -3 sont les valeurs propres de A (et de f), que U, V, W en sont des vecteurs propres, et que A est diagonalisable.

2.2 Applications linéaires et matrices

Exercice 14 - Applications linéaires, mais pas endomorphismes

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y)) = (x - 2y, x, 3x + y)$ et g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g((x, y, z)) = (x + 3y + 2z, -2x + z)$.

1. Déterminer l'application $g \circ f$ et montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

L'application $g \circ f$ est bien définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
g \circ f((x, y)) &= g((x - 2y, x, 3x + y)) = ((x - 2y) + 3x + 2(3x + y), -2(x - 2y) + (3x + y)) \\
&= (10x, x + 5y).
\end{aligned}$$

Vérifions rapidement que $g \circ f$ est une application linéaire : soient $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
g \circ f((x, y) + \lambda(a, b)) &= g \circ f((x + \lambda a, y + \lambda b)) = (10(x + \lambda a), (x + \lambda a) + 5(y + \lambda b)) \\
&= (10x, x + 5y) + \lambda(10a, a + 5b) = g \circ f((x, y)) + \lambda g \circ f((a, b)).
\end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Qu'en est-il de l'application $f \circ g$?

L'application $f \circ g$ est cette fois définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
f \circ g((x, y, z)) &= f((x + 3y + 2z, -2x + z)) \\
&= ((x + 3y + 2z) - 2(-2x + z), x + 3y + 2z, 3(x + 3y + 2z) + (-2x + z)) \\
&= (5x + 3y, x + 3y + 2z, x + 9y + 7z).
\end{aligned}$$

De même que dans la question précédente, on vérifie rapidement que $f \circ g$ est linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Retrouver ces résultats en se servant des matrices d'applications linéaires.

Pour déterminer l'expression de ces composées, on peut plutôt calculer des produits matriciels. En effet, en notant $\mathcal{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}_3$ celle de $\mathbb{R}^3$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_2}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3}(g) \text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

c'est bien la matrice de l'application obtenue à la question 1. De même :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_3}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 - Applications linéaires, image, noyau, matrice

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, puis donner leur noyau et leur image, préciser si elles sont injectives ou surjectives, et enfin donner leur matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \mapsto & (x; 2x - 3y; x + 4y) \end{cases}.$$

Vérifions d'abord que f est bien linéaire : soient $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(a, b)) &= f((x + \lambda a, y + \lambda b)) = (x + \lambda a, 2(x + \lambda a) - 3(y + \lambda b), (x + \lambda a) + 4(y + \lambda b)) \\ &= (x, 2x - 3y, x + 4y) + \lambda(a, 2a - 3b, a + 4b) = f((x, y)) + \lambda f((a, b)). \end{aligned}$$

Ainsi f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.

Déterminons $\text{Ker}(f)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff f((x, y)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, on en déduit que f est injective.

On rappelle que $\text{Im}(f)$ est engendré par les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0)), f((0, 1))) = \text{Vect}((1, 2, 1), (0, -3, 4)).$$

On peut vérifier que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre, et par conséquent une base de $\text{Im}(f)$. Ainsi $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, i.e. f n'est pas surjective.

Remarque : On peut retrouver ce point à l'aide du théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$, donc $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 2 - 0 = 2$. Notamment, la dimension de $\text{Im}(f)$ est toujours inférieure à la dimension de l'espace de départ. Dans cette question, et même les deux suivantes, l'application ne peut donc pas être surjective.

Enfin, en notant $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$2. g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \mapsto & (-x + y; x - y; 2x + 2y) \end{cases}.$$

De même que dans la question 1 : soient $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} g((x, y) + \lambda(a, b)) &= g((x + \lambda a, y + \lambda b)) \\ &= (-x + \lambda a + y + \lambda b, x + \lambda a - y - \lambda b, 2(x + \lambda a) + 2(y + \lambda b)) \\ &= (-x + y, x - y, 2x + 2y) + \lambda(-a + b, a - b, 2a + 2b) = g((x, y)) + \lambda g((a, b)). \end{aligned}$$

Ainsi g est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$.

Déterminons $\text{Ker}(g)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(g) &\iff g((x, y)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 4x = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, on en déduit que g est injective.

De même que dans la question précédente :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g((1, 0)), g((0, 1))) = \text{Vect}((-1, 1, 2), (1, -1, 2)).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre. Ainsi $\dim(\text{Im}(g)) = 2$, donc $\text{Im}(g) \neq \mathbb{R}^3$, i.e. g n'est pas surjective (comme annoncé dans la remarque précédente).

Avec les mêmes notations que précédemment : $\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $h = 2f - 3g$.

L'application h est la combinaison linéaire de deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, donc c'est encore une application linéaire. En effet, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel.

Avant de déterminer $\text{Ker}(h)$ et $\text{Im}(h)$, donnons son expression explicite : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h((x, y)) &= 2f((x, y)) - 3g((x, y)) = 2(x, 2x - 3y, x + 4y) - 3(-x + y, x - y, 2x + 2y) \\ &= (5x - 3y, x - 3y, -4x + 2y) \end{aligned}$$

Déterminons $\text{Ker}(h)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(h) &\iff h((x, y)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{cases} 4x = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(h) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, on en déduit que g est injective.

De même que dans la question précédente :

$$\text{Im}(h) = \text{Vect}(h((1, 0)), h((1, 0))) = \text{Vect}((5, 1, -4), (-3, -3, 2)).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre. Ainsi $\dim(\text{Im}(h)) = 2$, donc $\text{Im}(h) \neq \mathbb{R}^3$, i.e. h n'est pas surjective.

Avec les mêmes notations que précédemment : $\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(h) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : On aurait pu déterminer cette matrice en début de question : c'est $2\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(f) - 3\text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2}(g)$.

$$4. \ell : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z, t) & \mapsto \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Remarque : Contrairement aux questions précédentes, les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension 4, on ne peut pas conclure immédiatement sur la non-surjectivité (ou non-injectivité).

Commençons par vérifier que ℓ est une application linéaire : pour $(x, y, z, t), (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \ell((x, y, z, t) + \lambda(a, b, c, d)) &= \ell((x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c, t + \lambda d)) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x + \lambda a) - (t + \lambda d) & (y + \lambda b) + (t + \lambda d) \\ 3(x + \lambda a) + (z + \lambda c) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - t & y + t \\ 3x + z & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a - d & b + d \\ 3a + c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ell((x, y, z, t)) + \lambda \ell((a, b, c, d)). \end{aligned}$$

Ainsi ℓ est bien linéaire.

Déterminons $\text{Ker}(\ell)$: pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \text{Ker}(\ell) &\iff \ell((x, y, z, t)) = 0_2 \iff \begin{cases} 2x - t = 0 \\ y + t = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2x \\ y = -t = -2x \\ z = -3x \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = (x, -2x, -3x, 2x) = x(1, -2, -3, 2). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(\ell) = \text{Vect}((1, -2, -3, 2))$, donc $\text{Ker}(\ell)$ est engendré par un unique vecteur non nul, qui forme alors une famille libre et donc une base de $\text{Ker}(\ell)$. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(\ell)) = 1$, en particulier ℓ n'est pas injective.

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^4) = \text{rg}(\ell) + \dim(\text{Ker}(\ell))$, donc $\dim(\text{Im}(\ell)) = \text{rg}(\ell) = 4 - 1 = 3$. Ainsi $\text{Im}(\ell) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, i.e. ℓ n'est pas surjective. Or :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\ell) &= \text{Vect}(\ell(1, 0, 0, 0), \ell(0, 1, 0, 0), \ell(0, 0, 1, 0), \ell(0, 0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

puisque $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Remarque :

- On s'est bien ramené à une famille génératrice de cardinal 3, qui est la dimension de $\text{Im}(f)$ d'après le calcul précédent, il s'agit donc bien d'une base de $\text{Im}(f)$ (on peut aussi vérifier que c'est une famille libre).
- On pouvait aller plus vite pour la surjectivité : puisque les dimensions au départ et à l'arrivée sont identiques, ℓ est surjective (resp. injective) si et seulement si elle est bijective (résultats à retrouver à l'aide du théorème du rang). Or on a déjà montré qu'elle n'est pas injective, elle n'est donc pas bijective, donc pas surjective.

Enfin, notons $\mathcal{C}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ celle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}_4}(\ell) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 - Polynôme annulateur et matrice inversible

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ défini par $P(x) = x^2 - 5x + 4$, montrer que P est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En

déduire que A est inversible, puis donner A^{-1} .

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

On vérifie donc bien que :

$$P(A) = A^2 - 5A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0_3,$$

donc P est un polynôme annulateur de A . On en déduit que :

$$5A - A^2 = 4I_3, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{4}(5I_3 - A) \times A = I_3.$$

Ainsi A est inversible, et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - A) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Exercice 17 - Matrice d'application linéaire et changement de base

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_1$, et soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, 1, 2)$. On admettra que $\mathcal{C}_1 = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de passage $P_1 = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}$ de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{C}_1$.

La matrice P_1 contient les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}_1$ dans la base canonique $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1}(f)$. Exprimer B en fonction de A , P_1 et P_1^{-1} .

Avec les règles de changement de bases :

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{C}_1}(f) = P_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} = P_1^{-1} A P_1.$$

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(x, y, z) = (-2x + 2y - 4z, -3x + 3y - 4z, 3x - y + 6z)$. Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}_1$.

La matrice de f dans $\mathcal{B}_1$ est :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

D'après la question précédente, $\text{Mat}_{\mathcal{C}_1}(f) = B = P^{-1}AP$.

Grâce à la méthode de Gauss-Jordan on obtient $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc finalement :

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 & -6 \\ -7 & 6 & -5 \\ 9 & -4 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -35 & 24 & -33 \\ -29 & 20 & -27 \\ 22 & -14 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Exercice de concours

Exercice 18 - EDHEC ECE 2021 (ex3 adapté)

On considère un nombre réel a dans $]0; 1[$, ainsi que la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$. On note également I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}$ et $\text{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\}$.

1. (a) Montrer que $F = \text{Ker}(M_a - I)$ est un espace vectoriel, et déterminer une base de F , qu'on notera $\mathcal{B}_F$.

Remarque : On pourrait montrer que F est non vide et stable par combinaison linéaire, mais on va directement l'écrire comme l'espace engendré par une famille de vecteurs, qui sera en fait la base recherchée. Après les révisions sur les applications linéaires, on pourra même simplement dire que c'est le noyau d'une matrice.

On rappelle que a est un réel fixé dans $]0; 1[$, de sorte que $a - 1 \neq 0$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} X \in F &\iff (M_a - I)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ (1-a)x + (a-1)y = 0 \\ (1-a)y + (a-1)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \iff x = y = z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, notamment F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice. De plus cette famille est formée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre et il s'agit d'une base de F , notée $\mathcal{B}_F$.

- (b) On admet que $G = \text{Ker}(M_a - aI)$ est également un e.v., déterminer une base de G , qu'on notera $\mathcal{B}_G$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} X \in G &\iff (M_a - aI)X = 0_{3,1} \iff \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (1-a)x = 0 \\ (1-a)x = 0 \\ (1-a)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, i.e. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de G . De plus cette famille est formée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre et il s'agit d'une base de G , notée $\mathcal{B}_G$.

- (c) On note $\mathcal{B}$ la famille formée des vecteurs de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ (i.e. la **concaténation** de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$). La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

D'après les questions précédentes, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Puisque son cardinal est seulement 2 et que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3, alors $\mathcal{B}$ ne peut pas être une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En revanche on vérifie que c'est une famille libre.

2. On note E l'espace vectoriel engendré par I , M_a et M_a^2 .

- (a) Quelle est la dimension de E ?

Par définition, la famille (I, M_a, M_a^2) est génératrice de E . Vérifions que c'est également une famille libre.

$$\text{Tout d'abord, } M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}.$$

Soient λ, μ, ν des réels tels que $\lambda I + \mu M_a + \nu M_a^2 = 0_3$, alors en considérant la première colonne de cette matrice, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu(1-a) + \nu(1-a^2) = 0 \\ \nu(1-a)^2 = 0 \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases},$$

puisque $1-a \neq 0$, $1-a^2 \neq 0$ et $(1-a)^2 \neq 0$.

On a donc bien montré que la famille (I, M_a, M_a^2) est libre, il s'agit donc d'une base de E , ainsi $\dim(E) = 3$.

- (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

$$JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $JK^2 = 0_3$.

Or $M_a - I = (1-a)J$ et $M_a - aI = (1-a)K$. Ainsi :

$$(M_a - I)(M_a - aI)^2 = ((1-a)J)((1-a)K)^2 = (1-a)^3 JK^2 = 0_3$$

d'après ce qui précède.

- (c) En déduire que M_a^3 appartient à E .

En développant le produit calculé à la question précédente :

$$(M_a - I)(M_a - aI)^2 = (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2I) = M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + (a^2+2a)M_a - a^2I.$$

Or ce produit est la matrice nulle, donc :

$$M_a^3 = a^2 I - a(a+2)M_a + (2a+1)M_a^2 \in E,$$

car $E = \text{Vect}(I, M_a, M_a^2)$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que : $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$. On donnera les valeurs de u_0 , v_0 et w_0 , et on exprimera u_{n+1} , v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n , v_n et w_n .

Montrons par récurrence l'existence de telles suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on peut écrire $M_a^0 = I = 0 \times M_a^2 + 0 \times M_a + 1 \times I$. On pose donc $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe des réels u_n , v_n et w_n tels que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$. Alors :

$$M_a^{n+1} = M_a \times M_a^n = M_a(u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I) = u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a.$$

Or d'après la question précédente, $M_a^3 = a^2 I - a(a+2)M_a + (2a+1)M_a^2$, ainsi :

$$M_a^{n+1} = ((2a+1)u_n + v_n)M_a^2 + (-a(a+2)u_n + w_n)M_a + a^2 u_n I.$$

On pose donc :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} &= a^2 u_n \end{cases}, \text{ de sorte que } M_a^{n+1} = u_{n+1} M_a^2 + v_{n+1} M_a + w_{n+1} I.$$

De plus (I, M_a, M_a^2) est une base de E d'après la question 2.(a), ainsi l'expression obtenue pour M_a^{n+1} est la décomposition de M_a^{n+1} dans cette base, et elle est donc unique.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que : $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$.

De plus $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} &= (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} &= -a(a+2)u_n + w_n \\ w_{n+1} &= a^2 u_n \end{cases}.$$

- (b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script *Python* fourni ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n , v_n et w_n lorsque n et a sont renseignés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle *for*.

Comme indiqué dans l'énoncé, le problème de ce script se trouve dans la boucle *for*. En effet, au début de l'étape k , les variables *u*, *v* et *w* contiennent u_k , v_k et w_k respectivement. On veut utiliser les relations obtenues à la question précédente, on exécute donc d'abord la ligne 7 : *u* = (2*a+1)**u* + *v*. À l'issue de cette opération, *u* contient maintenant u_{k+1} , et c'est cette valeur de *u* qui sera utilisée dans les deux lignes suivantes : ce n'est pas la bonne, il faudrait utiliser u_k ...

- (c) Réécrire ce script en le corrigeant pour qu'il calcule correctement u_n , v_n et w_n .

Pour éviter le problème décrit à la question précédente, il faudrait garder en mémoire la valeur de u_k (par exemple dans une variable *u_prec*) pour pouvoir l'utiliser dans le calcul de v_{k+1} et w_{k+1} . Ainsi, même après avoir modifié *u*, on aura accès à la valeur de u_k .

```

1  n = int(input('Entrez une valeur pour n :'))
   a = float(input('Entrez une valeur pour a :'))
   u = 0
   v = 0
5  w = 1
   for k in range(n) :
       u_prec = u
       u = (2*a+1)*u + v
       v = -a*(a+2)*u_prec + w
10      w = a*a*u_prec
   print(u, v, w)
```

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2u_n$.

D'après les relations obtenues en 3.(a), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + w_{n+1} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2u_n.$$

On a appliqué les relations de récurrence aux rangs $n+2$, $n+1$ et n respectivement.

On **admet** qu'on peut en déduire l'expression suivante pour (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$.

On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) M_a^2 + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right) M_a + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \right) I$.

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

D'après l'énoncé, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$. Or $a \in]0; 1[$, donc par croissances comparées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)a^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} na^{n-1} = 0.$$

Finalement, par somme et quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{(a-1)^2}$.

De plus pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = a^2u_{n-1}$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{a^2}{(a-1)^2}$.

De même, $v_n = -a(a+2)u_{n-1} + w_{n-1}$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{-a(a+2)}{(a-1)^2} + \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{-2a}{(a-1)^2}$.

6. En déduire la matrice $L_a = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n$.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} L_a &= \lim_{n \rightarrow +\infty} M_a^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \right) M_a^2 + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \right) M_a + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \right) I \\ &= \frac{1}{(a-1)^2} (M_a^2 - 2aM_a + a^2I) = \frac{1}{(a-1)^2} (M_a - aI)^2. \end{aligned}$$

Or, avec les notations de la question 2.(b) : $M_a - aI = (1-a)K$, donc $(M_a - aI)^2 = (1-a)^2K^2$. Finalement :

$$L_a = \frac{(1-a)^2}{(a-1)^2} K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

En calculant le produit, on vérifie que : $L_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_a$.

Remarque : En admettant des règles opératoires sur les limites de matrices, on pourrait montrer le point précédent ainsi : $M_a^{2n} = (M_a^n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_a^2$, or $M_a^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_a$.

8. (a) Montrer que : $\forall X \in \text{Ker}(M_a - I), L_a X = X$.

D'après 1.(a), $\text{Ker}(M_a - I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Soit $X \in \text{Ker}(M_a - I)$, il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}. \text{ Alors : } L_a X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = X.$$

- (b) Montrer que : $\forall Y \in \text{Im}(M_a - I), L_a Y = 0_{3,1}$.

Soit $Y \in \text{Im}(M_a - I)$, alors il existe $X \in \mathcal{C}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que : $Y = (M_a - I)X = (1-a)JX$, en utilisant les notations de la question 2.(b). Alors :

$$L_a Y = (1-a)L_a JX = (1-a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = 0_3 X = 0_{3,1}.$$

3 Probabilités

3.1 Probabilités, indépendance, conditionnement

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir « face » est $\frac{1}{3}$.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun résultat « face » ? et d'obtenir au moins un résultat « face » ?

On modélise l'expérience avec l'univers $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^n$, et on considère que tous les lancers sont indépendants. Notons F_k l'événement « on obtient face au k -ième lancer », alors pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(F_k) = \frac{1}{3}$.

L'événement « n'obtenir aucun résultat face » est donc $\bigcap_{k=1}^n \overline{F_k}$ (où les événements $\overline{F_k}$ sont indépendants), et

$$\text{sa probabilité est alors : } P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{F_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(\overline{F_k}) = \prod_{k=1}^n \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

L'événement « obtenir au moins un résultat face » est $\bigcup_{k=1}^n F_k$, c'est le complémentaire de l'événement précédent.

$$\text{Ainsi : } P\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{F_k}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Notamment, plus n est grand, plus cette probabilité est proche de 1.

2. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, quelle est la probabilité d'obtenir le premier « face » au k -ième lancer ?

Notons A_k l'événement « on obtient le premier face au k -ième lancer ». Cet événement se réalise quand les $k-1$ premiers lancers donnent tous « pile », et que le k -ième donne « face ». Ainsi :

$$A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{F_i}\right) \cap F_k, \quad \text{donc} \quad P(A_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{F_i})\right) \times P(F_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

3. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, il n'y ait jamais un résultat « pile » à la suite d'un résultat « face » ?

Notons B cet événement, déterminons la forme d'une issue $\omega \in B$. Pour qu'un résultat « face » ne soit jamais suivi d'un « pile », la contrainte suivante doit être respectée : dès qu'on obtient un résultat « face », tous les résultats jusqu'au dernier lancer doivent donner « face ». Une issue dans B est donc entièrement déterminée par le premier lancer où on obtient « face ». On peut ainsi écrire B comme une union disjointe :

$$B = \bigcup_{k=0}^n (\overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_n) = \bigcup_{k=0}^n \left(\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{F_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^n F_j \right) \right).$$

Finalement :

$$P(B) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{i=1}^k P(\overline{F_i}) \times \prod_{j=k+1}^n P(F_j) \right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3} \right)^k \left(\frac{1}{3} \right)^{n-k} = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{3^n}.$$

Exercice 20

On joue avec deux dés équilibrés, de la manière suivante : on lance successivement les deux dés à la fois, en on considère la somme des deux résultats. Si cette somme vaut 7 on gagne, si elle vaut 6 on perd, dans les autres cas on relance les dés.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de gagner au n -ième lancer (et pas avant) ?

On considère que tous les lancers sont **indépendants**.

On introduit quelques notations : soit V_k l'événement « obtenir 7 au k -ième lancer » (victoire), D_k l'événement « obtenir 6 au k -ième lancer » (défaite), et $C_k = \overline{V_k \cup D_k}$ (on n'obtient ni 6 ni 7, on continue). On peut déterminer la loi de la somme des résultats de deux dés équilibrés à 6 faces, ainsi :

$$P(V_k) = \frac{1}{6}, \quad P(D_k) = \frac{5}{36}, \quad \text{et} \quad P(C_k) = 1 - P(V_k) - P(D_k) = \frac{25}{36}.$$

On considère l'événement G_n : « on gagne au n -ième lancer ». Il se réalise si et seulement si : V_n se réalise, et lors des $n - 1$ premiers lancers, C_k s'est réalisé (on n'a ni gagné ni perdu avant le lancer n). Ainsi, la probabilité de gagner au n -ième lancer est :

$$P(G_n) = P(C_1 \cap \dots \cap C_{n-1} \cap V_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(C_k) \right) \times P(V_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{25}{36} \right)^{n-1},$$

car les événements $C_1, \dots, C_{n-1}, V_n$ sont indépendants.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n de gagner en n coups ou moins.

D'après la question précédente, puisque les événements G_k sont deux-à-deux disjoints :

$$p_n = P\left(\bigcup_{k=1}^n G_k\right) = \sum_{k=1}^n P(G_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11} \left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right).$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité q_n de perdre en n coups ou moins.

On peut effectuer les mêmes calculs que dans la question 1 pour déterminer la probabilité de perdre au n -ième lancer : elle vaut $\frac{5}{36} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}$. Ainsi :

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{5}{36} \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} = \frac{5}{36} \times \frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{11} \left(1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n\right).$$

4. Déterminer $\lim p_n$ et $\lim q_n$, et interpréter ces résultats.

On constate que $\lim p_n = \frac{6}{11}$ et $\lim q_n = \frac{5}{11}$. On peut en donner l'interprétation suivante : si on continue de lancer les dés autant de fois que nécessaire, on finira toujours par gagner ou perdre (et le jeu s'arrêtera), puisque $\lim p_n + q_n = 1$.

Remarque : Pour justifier correctement ce point, il faudrait utiliser le théorème de convergence monotone pour les probabilités (au programme de Maths Approfondies).

Exercice 21 - Probabilités conditionnelles et relation de récurrence

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de deux pièces A et B ayant chacune un côté Pile et un côté Face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé : si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A ; si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B ; et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté Face. Pour tout entier naturel n , on note :

- A_n l'événement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté Face » ;
- B_n l'événement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, une pièce est du côté Pile et l'autre côté Face » ;
- C_n l'événement : « à l'issue du n -ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté Pile ».

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1 , b_1 et c_1 .

Au début du jeu, les deux pièces sont du côté Face, autrement dit A_0 est réalisé. Ainsi $a_0 = 1$, et $b_0 = c_0 = 0$. Il y a trois possibilités pour le résultat du premier lancer de dés, qui arrivent chacune avec probabilité $\frac{1}{3}$:

- Si on obtient 1 ou 2, on retourne la pièce A qui sera donc côté Pile, et B_1 sera réalisé.
- Si on obtient 3 ou 4, on retourne la pièce B qui sera donc côté Pile, et B_1 sera encore réalisé.
- Si on obtient 5 ou 6 on ne retourne aucune pièce, elles sont donc encore toutes deux côté face, et A_1 est réalisé.

Finalement, $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) \neq 0$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

On raisonne de la même manière que dans la question précédente. Si A_n est réalisé, *i.e.* si les deux pièces sont du côté Face après le n -ième lancer, alors la seule possibilité pour que A_{n+1} soit réalisé est de tirer un 5 ou un 6 au $(n+1)$ -ième lancer (sinon on retourne l'une des pièces), ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{3}$. Autrement dit, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

Remarque : Dans le cas où le $(n+1)$ -ième lancer donne un résultat entre 1 et 4, B_{n+1} sera vérifié, ainsi $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ (on s'en servira en 5.(b)).

3. Calculer b_2 .

On peut utiliser la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements (A_1, B_1) (on a justifié que C_1 n'était jamais réalisé) :

$$P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) = a_1P_{A_1}(B_2) + b_1P_{B_1}(B_2).$$

De même que dans la question 1, on justifie que $P_{A_1}(B_2) = \frac{2}{3}$. En effet, si les deux pièces sont côté Face après le premier lancer, pour que B_2 soit vérifié il faut en retourner une, *i.e.* il faut que le deuxième lancer donne 1, 2, 3 ou 4.

De plus, $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$. En effet, si l'une des pièces est sur Pile et l'autre sur Face après le premier lancer, pour que B_2 soit vérifié il ne faut pas en retourner, *i.e.* il faut que le deuxième lancer donne 5 ou 6.

Finalement $b_2 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}b_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

4. Pour tout entier naturel n , exprimer c_n en fonction de a_n et b_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, donc $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$, *i.e.* $c_n = 1 - a_n - b_n$.

5. Soit $n \geq 2$. On admet que $b_n \neq 0$ et $c_n \neq 0$.

- (a) Sans justifier, donner $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.

De même que dans les questions 1 et 3, on peut montrer que $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{3}$, et que $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$.

- (b) Établir : $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$

En utilisant la formule des probabilités totales, de la même manière qu'à la question 3, on obtient :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}), \\ \text{i.e. } b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n. \end{aligned}$$

On a utilisé les probabilités conditionnelles données à la question précédente, et à la question 3.

- (c) En déduire : $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$. Cette relation est-elle encore valable quand $n \in \{0; 1\}$?

D'après les deux questions précédentes,

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}(1 - a_n - b_n) = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}.$$

Vérifions que cette relation est toujours vraie aux rangs 0 et 1 :

- pour $n = 0$: $b_0 = 0$, donc $-\frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = b_1$.
- pour $n = 1$: $b_1 = \frac{2}{3}$, et $-\frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9} = b_2$.

6. Déterminer le terme général de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

D'après la question précédente, (b_n) est une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer le terme général de (b_n) , on cherche le point fixe de la relation de récurrence pour se ramener à une suite géométrique.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} : \quad x = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \iff \frac{4}{3}x = \frac{2}{3} \iff x = \frac{1}{2}.$$

On pose donc $u_n = b_n - \frac{1}{2}$, de sorte que (u_n) soit une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = b_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(b_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}u_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u_0$, où $u_0 = b_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

On peut interpréter ce résultat ainsi : après un grand nombre de lancers, la probabilité que les deux pièces soient sur des côtés différents est proche de $\frac{1}{2}$.

3.2 Variables aléatoires

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$, et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que la variable $Y = n - X$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Puisque X est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, on en déduit que $Y = n - X$ est aussi à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k},$$

car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Puisque $p = 1 - (1-p)$, on en déduit que Y suit la loi $\mathcal{B}(n, 1-p)$.

Exercice 23

Soit $p \in]0; 1[$ et soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $P(X > k)$.

Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i], \quad \text{donc} \quad P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1},$$

car il s'agit d'une union disjointe. On peut calculer cette série en effectuant le changement de variables $j = i - k - 1$:

$$P(X > k) = \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+k} = p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

2. En déduire que pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $P_{[X > k]}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$.

Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, alors par définition, $P_{[X > k]}(X > k + \ell) = \frac{P([X > k] \cap [X > k + \ell])}{P(X > k)}$.

Or $[X > k + \ell] \subset [X > k]$, donc $[X > k] \cap [X > k + \ell] = [X > k + \ell]$. Ainsi, d'après la question 1 :

$$P_{[X > k]}(X > k + \ell) = \frac{P(X > k + \ell)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = P(X > \ell).$$

Exercice 24 - Loi géométrique tronquée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On lance une pièce donnant Pile avec probabilité p , jusqu'à obtenir le premier Pile ; dans tous les cas, on s'arrête après le n -ième lancer. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; 1[, \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}$.

On montre cette proposition par récurrence.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^0 kx^{k-1} = 0$ (c'est une somme vide) et $\frac{1-x^0+0}{(1-x)^2} = 0$. Ainsi l'égalité est vérifiée au rang 1.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'égalité vérifiée au rang n : pour tout $x \in]0;1[$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} + nx^{n-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{nx^{n-1}(1-x)^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 + nx^{n-1}(x^2 - 2x) + (n-1)x^n}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

L'égalité est donc encore vérifiée au rang $n+1$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on a bien montré la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, et déterminer la loi de X .

Vue la description de l'expérience, on effectuera entre 1 et n lancers, donc X est bien à valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$.

De plus, notons A_i l'événement « le i -ème lancer donne un Pile ».

- Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, l'événement $[X = k]$ est réalisé quand le premier Pile arrive au k -ième lancer. Ainsi :

$$[X = k] = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k, \quad \text{donc} \quad P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{A_i}) \right) P(A_k) = (1-p)^{k-1}p,$$

puisque les lancers sont supposés indépendants.

- L'événement $[X = n]$ est réalisé si les $n-1$ premiers lancers ont tous donnés Face, quel que soit le résultat du n -ième lancer. Ainsi, de même qu'au-dessus :

$$[X = n] = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}, \quad \text{donc} \quad P(X = k) = \prod_{i=1}^{n-1} P(\overline{A_i}) = (1-p)^{n-1}.$$

3. Calculer l'espérance de X .

D'après les questions précédentes, l'espérance de X est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}p \right) + n(1-p)^{n-1} \\ &= p \frac{1 - n(1-p)^{n-1} + (n-1)(1-p)^n}{p^2} + n(1-p)^{n-1} \\ &= \frac{1 - n(1-p)^{n-1} + (n-1)(1-p)^n + pn(1-p)^{n-1}}{p} \\ &= \frac{1 + n(p-1)(1-p)^{n-1} + (n-1)(1-p)^n}{p} \\ &= \frac{1 - (1-p)^n}{p}. \end{aligned}$$

4. Écrire une fonction Python d'en-tête **def simulX(n,p)**, dont l'exécution simule l'expérience décrite et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

```
1 import numpy.random as rd

def simulX(n,p) :
    for k in range(1,n) :
5         if rd.random() < p :
            return k
    return n
```

Exercice 25 - Urne de Pólya

On considère une urne contenant initialement N_1 boules blanches et N_2 boules noires, où $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$. On réalise des tirages successifs dans l'urne, avec le protocole suivant : à chaque étape, on replace la boule tirée dans l'urne, en y ajoutant une autre boule de la même couleur. Ainsi, à la fin de l'étape n , l'urne contiendra un total de $N_1 + N_2 + n$ boules. On note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée à l'étape n est noire, et 0 si elle est blanche.

1. Les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ sont-ils indépendants ?

Comparons $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ et $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$.

La loi de X_1 est simple, mais pour la loi de X_2 , il est nécessaire de conditionner au résultat de X_1 . La probabilité que les deux premières boules tirées soient blanches est donc :

$$P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \times \frac{N_2 + 1}{N_1 + N_2 + 1}.$$

En effet, on tire la première boule dans une urne contenant $N_1 + N_2$ boules, dont N_2 noires ; et sachant que la première boule tirée était noire, on tire la deuxième dans une urne contenant $N_1 + N_2 + 1$ boules, dont $N_2 + 1$ noires.

Pour déterminer $P(X_2 = 1)$, utilisons la formule des probabilités totales. On raisonne de la même manière que ci-dessus pour calculer $P_{[X_1=0]}(X_2 = 1)$: sachant que la première boule tirée était blanche, on tire la deuxième boule dans une urne contenant $N_1 + N_2 + 1$ boules dont N_1 noires. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \\ &= \frac{N_1}{N_1 + N_2} \times \frac{N_2}{N_1 + N_2 + 1} + \frac{N_2}{N_1 + N_2} \times \frac{N_2 + 1}{N_1 + N_2 + 1} \\ &= \frac{N_2(N_1 + N_2 + 1)}{(N_1 + N_2)(N_1 + N_2 + 1)} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2}\right)^2 \neq P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$. Finalement, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Remarque : On a cependant montré que X_1 et X_2 ont la même loi : ce sont des v.a. de Bernoulli de paramètre $\frac{N_2}{N_1 + N_2}$.

2. Montrer que $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0])$.

Avec le même raisonnement que dans la question 1 :

$$\begin{aligned} P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \times \frac{N_2}{N_1 + N_2 + 1} \\ &= \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)(N_1 + N_2 + 1)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \times \frac{N_1}{N_1 + N_2 + 1} \\ &= \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)(N_1 + N_2 + 1)}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0)$.

3. Plus généralement, montrer par récurrence la proposition suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $a_1, \dots, a_n \in \{0; 1\}$ et si

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \text{ alors : } P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n]) = \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{n-1} (N_1 + N_2 + k)}.$$

- **Initialisation :** Au rang $n = 1$, on a déjà justifié que : $P(X_1 = 0) = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$ et $P(X_1 = 1) = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$. Cela correspond bien à la formule donnée pour $n = 1$, avec $s_1 = 0$ pour la première probabilité et $s_1 = 1$ pour la seconde.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que la propriété est vérifiée au rang n . Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in \{0; 1\}$, déterminons $P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_{n+1} = a_{n+1}])$ en conditionnant par rapport à $[X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n]$.

$$P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_{n+1} = a_{n+1}]) = P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n]) P_{[X_1=a_1] \cap \dots \cap [X_n=a_n]}(X_{n+1} = a_{n+1})$$

On peut exprimer $P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n])$ grâce à l'hypothèse de récurrence, calculons la probabilité conditionnelle suivante. Sachant que les résultats des n premiers tirages étaient $a_1, \dots, a_n$, alors au moment d'effectuer le $(n+1)$ -ième tirage, l'urne contient $N_1 + N_2 + n$ boules, dont $N_2 + s_n$ sont noires et $N_1 + n - s_n$ sont blanches. En effet, pour chaque résultat a_k valant 1 on a rajouté une boule noire, *i.e.* on en a rajouté $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ en tout ; pour les $n - s_n$ autres tirages, on a rajouté une boule blanche. Finalement :

$$P_{[X_1=a_1] \cap \dots \cap [X_n=a_n]}(X_{n+1} = 1) = \frac{N_2 + s_n}{N_1 + N_2 + n}$$

$$\text{et } P_{[X_1=a_1] \cap \dots \cap [X_n=a_n]}(X_{n+1} = 0) = \frac{N_1 + n - s_n}{N_1 + N_2 + n}.$$

Ainsi, pour le cas $a_{n+1} = 1$: puisque $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + 1$, alors

$$P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n] \cap [X_{n+1} = 1]) = \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{n-1} (N_1 + N_2 + k)} \times \frac{N_2 + s_n}{N_1 + N_2 + n}$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^n (N_1 + N_2 + k)} = \frac{\prod_{i=0}^{(n+1)-s_{n+1}-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_{n+1}-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{(n+1)-1} (N_1 + N_2 + k)}.$$

Et pour le cas $a_{n+1} = 0$: puisque $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n$, alors

$$P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n] \cap [X_{n+1} = 0]) = \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{n-1} (N_1 + N_2 + k)} \times \frac{N_1 + n - s_n}{N_1 + N_2 + n}$$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{n-s_n} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_n-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^n (N_1 + N_2 + k)} = \frac{\prod_{i=0}^{(n+1)-s_{n+1}-1} (N_1 + i) \times \prod_{j=0}^{s_{n+1}-1} (N_2 + j)}{\prod_{k=0}^{(n+1)-1} (N_1 + N_2 + k)}.$$

Dans les deux cas, la formule est bien vérifiée au rang $n+1$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on a bien vérifié la propriété annoncée. Notamment, la probabilité $P([X_1 = a_1] \cap \dots \cap [X_n = a_n])$ ne dépend que de n et $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

3.3 Exercice de concours

Exercice 26 - Ecricome Appli 2024 (extrait de l'exercice 1)

Partie I

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose : $R_X(k) = \mathbb{P}(X > k)$.

1. Soit p un réel dans $]0; 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .

- (a) Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .

Puisque X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = \ell) = (1-p)^{\ell-1}p$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} R_X(k) &= \mathbb{P}(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} (1-p)^{\ell-1}p = \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i+k}p \quad \text{avec } i = \ell - k - 1 \\ &= p(1-p)^k \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i = p(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k. \end{aligned}$$

- (b) Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p$.

D'après la question précédente, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- (a) Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque X est à valeurs entières, on peut écrire : $[X > k-1] = [X = k] \cup [X > k]$, et cette union est disjointe. Ainsi : $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$, i.e. $R_X(k-1) = \mathbb{P}(X = k) + R_X(k)$. Finalement, $\mathbb{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$.

- (b) En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = R_Y(k)$.

Les variables X et Y sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Supposons qu'elles suivent la même loi, alors : $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = \ell) = \mathbb{P}(Y = \ell)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$R_X(k) = \mathbb{P}(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = \ell) = R_Y(k).$$

- Réciproquement, supposons que $R_X(k) = R_Y(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k) = R_Y(k-1) - R_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k)$. Donc X et Y suivent la même loi.

Partie II

3. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques, alors : $\frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{a(n+1) - b}{(n+1)!}$. Pour que ce numérateur soit toujours égal à n , il suffit que $a = b = 1$. Ainsi : $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$.

- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente, et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

On reconnaît une série télescopique à l'aide de la question précédente. En effet, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi cette série converge et sa somme est : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

4. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$.

- (a) Montrer que la variable aléatoire $X+1$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X+1)$. En déduire que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $X+1$ admet une espérance si et seulement si la série

$\sum_{n \geq 1} (n+1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(n+1)\mathbb{P}(X = n) = \frac{(n+1)n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$.

Ainsi cette série est à termes positifs et, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N (n+1)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e.$$

Cette série est donc bien absolument convergente et sa somme est e . On en déduit que $X + 1$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X + 1) = e$.

Puisque $X = (X + 1) - 1$, alors par linéarité de l'espérance, X admet également une espérance, et de plus : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X + 1) - \mathbb{E}(1) = e - 1$.

- (b) Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}((X - 1)(X + 1))$. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

De même que dans la question précédente : d'après le théorème de transfert, $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{n \geq 1} (n - 1)(n + 1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Or cette série est à termes positifs, et pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N (n - 1)(n + 1)\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^N \frac{(n + 1)n(n - 1)}{(n + 1)!} = \sum_{n=2}^N \frac{1}{(n - 2)!} = \sum_{m=0}^{N-2} \frac{1}{m!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e$$

(le terme de rang 1 de la série était nul, on a donc pu simplifier et effectuer le changement d'indice $m = n - 2$). Finalement $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$ admet bien une espérance, où $\mathbb{E}(X^2 - 1) = e$.

Par linéarité de l'espérance, $X^2 = (X^2 - 1) + 1$ admet encore une espérance, et : $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^2 - 1) + \mathbb{E}(1) = e + 1$. Notamment X admet une variance, et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e + 1 - (e - 1)^2 = 3e - e^2 = e(3 - e).$$

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1. On étudie la durée de vie d'un appareil, mesurée en années. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, pendant chaque année numéro k (où $k \in \mathbb{N}^*$), l'appareil a une certaine probabilité de tomber en panne. Plus précisément, pour tout entier naturel k non nul : si la machine n'est pas tombée en panne pendant l'année $k - 1$, alors elle tombera en panne lors de l'année k avec probabilité α_k , et elle continuera de fonctionner pendant toute l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$. On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil : si l'appareil tombe en panne pendant l'année k , sa durée de vie aura été égale à k .

5. Justifier que pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons A_k l'événement « l'appareil n'est pas tombé en panne lors de l'année k », autrement dit $A_k = [X > k]$. L'énoncé peut alors être traduit par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{A_{k-1}}(A_k) = 1 - \alpha_k$. Ainsi :

$$1 - \alpha_k = \mathbb{P}_{[X > k-1]}(X > k) = \frac{\mathbb{P}([X > k - 1] \cap [X > k])}{\mathbb{P}[X > k - 1]} = \frac{\mathbb{P}(X > k)}{\mathbb{P}(X > k - 1)} = \frac{R_X(k)}{R_X(k - 1)}.$$

Finalement $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$, et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.

On montre ce résultat par une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation** : D'après la question précédente, $R_X(1) = (1 - \alpha_1)R_X(0)$, or $R_X(0) = \mathbb{P}(X > 0) = 1$ car l'appareil fonctionne pendant toute l'année 0. Ainsi la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité** : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$. Alors d'après la question précédente :

$$R_X(k + 1) = (1 - \alpha_{k+1})R_X(k) = (1 - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \alpha_i),$$

de sorte que la propriété est encore vraie au rang $k + 1$.

- **Conclusion** : Par principe de récurrence, on a bien montré le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

7. À l'aide de la partie I, en déduire une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout entier naturel k non nul, en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.

D'après la question 2.(a), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k)$. Ainsi, d'après la question précédente, pour $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) = (1 - (1 - \alpha_k)) \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i).$$

Pour $k = 1$: $\mathbb{P}(X = 1) = R_X(0) - R_X(1) = 1 - (1 - \alpha_1) = \alpha_1$. La formule précédente est donc toujours valable pour $k = 1$, car par convention : $\prod_{i=1}^0 (1 - \alpha_i) = 1$ (c'est un produit vide).

8. (a) *Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p \in]0; 1[$. Reconnaître la loi de X .*
D'après la question 7, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Ainsi X suit une loi géométrique de paramètre p .

Remarque : On aurait aussi pu vérifier que la fonction R_X est la même que pour une variable de loi géométrique, en utilisant les questions 1.(a) et 2.(b).

- (b) *Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = \frac{k}{k+1}$. Déterminer la loi de X .*

D'après la question 7, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Il s'agit donc de la loi étudiée dans la partie II.