Exercices calculatoires

Tous les calculs suivants doivent être effectués **sans calculatrice** en essayant d'être le plus efficace possible dans les étapes intermédiaires. Ensuite, on pourra **vérifier** ses résultats en utilisant une calculatrice ou un logiciel de calcul formel du type Xcas pour les expressions littérales. Dans chaque thématique, les calculs sont classés par difficulté croissante. Certains derniers calculs sont difficiles. *Utile :* Savoir les carrés jusque 16^2, les cubes jusque 5^3, les puissances de 2 jusque 2^{12}, celles de 3 jusque 3^4 et celles de 5 jusque 5^4.

1. Fractions

Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

$a=\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{11}{7}$ $\quad b=\frac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{5}}$ $\quad c=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$ $\quad d=\frac{15}{22}\times\frac{46}{35}\times\frac{77}{69}$ $\quad e=\frac{15}{11}\times\frac{77}{10}\div\frac{3}{14}$ $\quad f=\frac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{3}}{4}$

$g=\dfrac{1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}$ $\quad h=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$ $\quad i=\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{10}}$ $\quad j=(2\times3\times5\times11)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}\right)$ $\quad k=\dfrac{2\ 021\times2\ 022+2\ 023\times23+1\ 999}{2\ 023\times2\ 022-2\ 021\times2\ 022}$

2. Identités remarquables

Simplifier les nombres suivants :

$A=(2\sqrt{3}+3)^2$ $\quad B=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ $\quad C=(-\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ $\quad D=(5-2\sqrt{7})(5+2\sqrt{7})$ $\quad E=(\sqrt{3}-2+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})$ $\quad F=\dfrac{4\ 002}{1\ 000\times1\ 002-999\times1\ 001}$

3. Racines carrées

Mettre les nombres suivants sous la forme de $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{N}$, b le plus petit possible ou simplifier au mieux :

$A=\sqrt{50}+\sqrt{18}$ $\quad B=3\sqrt{75}-\sqrt{27}$ $\quad C=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ $\quad D=\left(\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^4$ $\quad E=\sqrt{24}\times\sqrt{56}$ $\quad F=(4+\sqrt{11})^2-(4-\sqrt{11})^2$

$G=\sqrt{2^2\times3^3\times5^5}$ $\quad H=\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$ $\quad I=\sqrt{2^{11}\times7^5\times5^{10}}$ $\quad J=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ $\quad K=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad L=\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

4. Puissances de 10

Mettre les nombres suivants sous forme d'écriture scientifique :

$a=0{,}001^3$ $\quad b=2000^8$ $\quad c=0{,}03^4$ $\quad d=3\times10^{-7}-0{,}000005$ $\quad e=24\times10^{-6}+3\times10^{-5}-140\times10^{-7}$ $\quad f=10^{-4}\times0{,}1^{-3}$ $\quad g=20^3\times0{,}02^{-2}$

5. Puissances

Exprimer les nombres suivants sous la forme d'une puissance de 2, 3 et 5. $(2^x\times3^y\times5^z$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3)$

$A=12^3$ $\quad B=25^2$ $\quad C=\dfrac{81^2}{27^3}$ $\quad D=\dfrac{20^3\times4^{-2}}{5^{-2}\times50^2}$ $\quad E=\dfrac{6^5\times9^{-2}}{8^2}$ $\quad F=\dfrac{2^5\times15^{-3}\times9^5}{18^{-3}\times10^2}$

$G=\dfrac{(3^2)^3\times(2^3)^2}{(2^2)^3\times(3^3)^2}$ $\quad H=\dfrac{3^{2^3}\times2^{3^2}}{2^{2^3}\times3^{3^2}}$ $\quad I=\left(-\frac{2}{3}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(-\frac{9}{2}\right)^3$ $\quad J=\dfrac{27\times10^4\times(6^2\times5)^{-2}}{(3^{-1}\times10)^{-3}}$ $\quad K=\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}$ $\quad L=2^{2^{2^2}}$

6. Suites géométriques

Mettre les expressions suivantes sous la forme $a\times b^n$, avec $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$:

$a_n=2^{n+1}-2^n$ $\quad b_n=2^{2n}\times3^{-n}$ $\quad c_n=4^{n+1}-2^{2n-3}$ $\quad d_n=2(3^{n+1}-3^n)-3^n$

$e_n=(-1)^{n+1}2^{2-3n}$ $\quad f_n=2\times(-4)^n+(-1)^{n+1}2^{2n+3}$ $\quad g_n=\dfrac{-3\times4^{n+1}}{2^{n+1}}$ $\quad h_n=\dfrac{6^{n-1}}{3^n}$

$i_n=1+\sum_{k=0}^{n}2^k$ $\quad j_n=\dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ $\quad k_n=\dfrac{2\left(2^{n+1}-2^n\right)}{3^n\left(3^n-3^{n-1}\right)}$ $\quad \ell_n=\dfrac{4^n-2^{2n-1}}{9^n+(-3)^{2n}}$

7. Développements

$A(x)=3(x-2)(x+1)$ $\quad B(x)=\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-4}{5}+\dfrac{1-x}{6}-x$ $\quad C(x)=x(x-2)(x+3)-x^2(x+1)$ $\quad D(x)=5(x-4)^2-11$ $\quad E(x)=(2+x)^3$

$F(x)=(x-2)^2(2x+3)-(3x+2)^2(x+5)$ $\quad G(x)=(3x-1)^3$ $\quad H(x)=(x-1)(x^2+x+1)-(x+1)(x^2-x+1)$ $\quad J(x)=(x^2+\sqrt{2}x+1)(1-\sqrt{2}x+x^2)$

8. Factorisation ou mise au même dénominateur

$a(x)=(x-2)(3x+5)-(2x-1)(2x-4)$ $b(x)=x^2-5x+\dfrac{25}{4}$ $c(x)=4x^2-1+(x-3)(2x+1)$ $d(x)=(x-1)^2-4$
$e(x)=(3x-5)^2-(x-7)^2$ $f(x)=3x-6+(x+1)(x-2)$ $g(x)=x^2-49-3x(7-x)$ $h(x)=(5x+2)(3x-7)+(5x+2)$
$k(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{5}{(x-3)^2}$ $\ell(x)=x^4-1$ $i(x,y)=x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ $j(x,y)=x^2+6xy+9y^2-169x^2$

9. Second degré

9.1. De tête

Trouver mentalement les racines des trinômes suivants sans calculer le discriminant. Indication : reconnaître une identité remarquable, un factorisation par x ou utiliser le résultat suivant : le produit des racines du trinôme ax^2+bx+c vaut $\frac{c}{a}$ et sa somme $-\frac{b}{a}$
1. $x^2-24x+144$ **2.** x^2+3x **3.** $25x^2-256$ **4.** $x^2+166x-167$ **5.** $5x^2+24x+19$
6. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)$ **7.** $(x+a)(x+b)-(m+a)(m+b)$ **8.** $mx^2+(2m+1)x+2$ sachant que m est racine

9.2. Signe du trinôme

Déterminer l'ensemble des valeurs sur lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles :

9. $13-12x-x^2$ **10.** $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$ **11.** $\dfrac{3x-1}{-x^2+6x-9}$

9.3. Signe des racines

En admettant que les trinômes suivants ont deux racines distinctes, déterminer le signe de ces racines sans les calculer :
Rappel : Le produit des racines du trinôme ax^2+bx+c vaut $\frac{c}{a}$ et sa somme $-\frac{b}{a}$
12. $15x^2-167x+11$ **13.** $17x^2+674x-13$ **14.** $23x^2+451x+17$

10. Polynômes

Factoriser les polynômes suivants en cherchant des racines évidentes : **a.** x^3+2x^2-x-2 **b.** x^3+2x+3

11. Valeur absolue

Résoudre les équations et inéquations suivantes :
a. $|x-6|=2$ **b.** $|x+5|=\frac{1}{2}$ **c.** $|5-2x|=1$ **d.** $|x-7|<10^{-1}$ **e.** $|3x+5|\geq 1$
f. $|5x-6|>0$ **g.** $|4+7x|\leq -\frac{1}{3}$ **h.** $\big|5-|x-1|\big|=2$ **i.** $\big||x-1|-3\big|\leq 1$ **j.** $\big||2x-6|+2\big|\geq 3$

12. Exponentielle

Simplifier les expressions suivantes :
$A(x)=\left(e^{2x+1}\right)^3\times\left(e^{-3x}\right)^2$ $B(x)=\sqrt{e^{4x^2-16}}$ $C(x)=e^x(1+2e^{-x})$ $D(x)=\sqrt{e^{x^2}}$ $E(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ $F(x)=(e^x+1)^2-\sqrt{e^{4x}}-1$
$G(x)=\dfrac{e^{x^2+x}}{e^x}$ $H(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ $I(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{4x}}{e^{2x}+1}$ $J(x)=\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^3\times\dfrac{(e^x)^2}{e}$ $K(x)=\dfrac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$ $L(x)=\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x}+\dfrac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}$

13. Logarithme

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:
$a=\ln 2048$ $b=\ln\frac{1}{4}$ $c=3\ln\frac{1}{8}+4\ln\frac{1}{5}$ $d=\ln\frac{1}{18}$ $e=\ln 21+2\ln 14-3\ln\frac{7}{8}$ $f=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ldots+\ln\frac{498}{499}+\ln\frac{499}{500}$
Simplifier les expressions suivantes :
$g(x)=e^{3\ln x}$ $h(x)=\ln(\sqrt{e^x})$ $i(x)=\ln\frac{e^x}{2}$ $j(x)=e^{-2\ln x}$ $k(x)=\ln\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$ $l(x)=\ln\frac{1}{e^{2x}}$
Transformation d'expressions grâce au logarithme :
$m(x)=2^x$ $n(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $o(x)=x^{\ln x}$

14. Dérivation

Sans se préoccuper des domaines de dérivabilité, calculer formellement les dérivées des fonctions suivantes :
$A(x)=(x^2-3)\sqrt{x}$ $B(x)=(3x^2-2x-1)e^x$ $C(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}$ $D(x)=\sqrt{x^2-x+3}$ $E(x)=(4x-7)^{\frac{5}{3}}$ $F(x)=(x^2-4x+5)^5$
$G(x)=2^x$ $H(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x+4}$ $I(x)=\dfrac{1}{(3x-7)^4}$ $J(x)=\ln(\ln x)$ $K(x)=\dfrac{e^x}{x^2-3x+1}$ $L(x)=\dfrac{3x-5}{e^{2x}}$

15. Primitives

Sans se préoccuper des domaines, calculer formellement une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ $\quad h(x) = e^{5x-1}$ $\quad i(x) = \dfrac{3x^2}{2+x^3}$ $\quad j(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3+x^2}}$ $\quad k(x) = 3xe^{2x^2-1}$

$l(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ $\quad m(x) = \dfrac{8e^{2x}}{(3-e^{2x})^3}$ $\quad n(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{x^2}$ $\quad p(x) = \dfrac{1-x^6}{1-x^2}$ $\quad q(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$ $\quad r(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

16. Calcul intégral

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2+4x-5 \,\mathrm{d}x$ $\quad B = \displaystyle\int_{-1}^{1} 6x^5-4x^3+7x \,\mathrm{d}x$ $\quad C = \displaystyle\int_{0}^{1} 3\sqrt{x}-4x \,\mathrm{d}x$ $\quad D = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ $\quad E = \displaystyle\int_{0}^{2} |x^2-3x+2| \,\mathrm{d}x$

$F = \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ $\quad G = \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-2x+1} \,\mathrm{d}x$ $\quad H = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ $\quad I = \displaystyle\int_{-1}^{2} (3x-2)^3 \,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_{0}^{2} e^{\frac{1}{2}x+2} \,\mathrm{d}x$

17. Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties judicieusement choisie :

$\alpha = \displaystyle\int_{0}^{2} te^{\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t$ $\quad \beta = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t+1}{e^t} \,\mathrm{d}t$ $\quad \gamma = \displaystyle\int_{1}^{e} \ln t \,\mathrm{d}t$ $\quad \delta = \displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t$ $\quad \epsilon = \displaystyle\int_{0}^{1} (t^2+3t-3)e^{2t} \,\mathrm{d}t$

18. Sommes et produits

Calculer :

18.1. Calculs de sommes simples

$a = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} k$ $\quad b = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 3k$ $\quad c = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$ $\quad d = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}$ $\quad e = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ $\quad f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 5^{n+1-k}$

18.2. Calculs de sommes doubles

$g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$ $\quad h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ $\quad \ell = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij$

18.3. Calcul de produits

$i = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3$ $\quad j = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k$ $\quad k = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ $\quad l = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

19. Changements de variables et d'indices

19.1. Changement de variable dans une intégrale

Calculer les intégrales suivantes en suivant le changement de variable indiqué :

$A = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{2+x^3} \,\mathrm{d}x$ avec $u = 2+x^3$ $\quad B = \displaystyle\int_{1}^{5} \sqrt{2x-1} \,\mathrm{d}x$ avec $u = \sqrt{2x-1}$ $\quad C = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+e^{-x}} \,\mathrm{d}x$ avec $u = e^x$

19.2. Changement d'indice dans une somme

Calculer les sommes suivantes en suivant le changement d'indice indiqué :

$F = \displaystyle\sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^3$ avec $k = j-2$ $\quad D = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n-k$ avec $i = n-k$ $\quad E = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $i = n+1-k$

20. Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a. $\begin{cases} x+4y=1 \\ 2x-5y=-11 \end{cases}$ $\quad$ **b.** $\begin{cases} 15x-21y=-51 \\ -10x+14y=34 \end{cases}$ $\quad$ **c.** $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 4x-3y=11 \end{cases}$ $\quad$ **d.** $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x-y+3z=13 \\ x+4y-z=-10 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases}$ **g.** $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases}$

21. Factorielles et coefficients binomiaux

21.1. Factorielles et coefficients binomiaux

Simplifier et si possible donner la valeur des expressions suivantes :

$a=\dfrac{51!}{49!}$ $b=\dfrac{11!}{8!}$ $c=\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}$ $d=\dbinom{6}{4}$ $e=\dbinom{12}{3}$ $f=\dbinom{n+1}{3}$ avec $n\geq 3$

21.2. Autour du binôme de Newton

1. Développer $(1+2x)^5$ **2.** Factoriser $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ **3.** Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

22. Calcul matriciel

Soient A, B, C, D et E les cinq matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer les produits suivants : $A\times E$, $B\times D$, $A\times C$, $C\times E$, $E\times C$, $D\times B$, A^2, A^3 et B^2

b. Calculer les inverses des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

23. Equations différentielles

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'=4y$ et $y(0)=20$ **2.** $y'=-y+12$ et $y(0)=4$ **3.** $y'=2y+5$ et $y(0)=20$

4. $y''-y=0$ avec $y(0)=5$ et $y'(0)=5$ **5.** $y''-4y'+3y=0$ avec $y(0)=1$ et $y(0)=2$ **6.** $y''+4y'+4y=0$ avec $y(1)=1$ et $y'(1)=-3$

24. Séries

Dans chaque cas, donner l'argument qui permet de justifier que la série concernée est convergente et calculer la somme indiquée :

$A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ $B=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}$ $C=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{5^{k+1}}$ $D=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$ $E=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^k}$

$F=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{k(k-1)}{3^{k-2}}$ $G=\sum\limits_{k=2}^{\infty}k2^{-k}$ $H=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{3^k}{k!}$ $I=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ $J=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{2^{k+1}}{k!}$

25. Formes canoniques

Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

$f(x)=x^2+4x+6$ $g(x)=x^2-6x+21$ $h(x)=x^2+x+7$ $k(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$ $\ell(x)=x^4-3x^2-\frac{1}{4}$ $m(x)=3x^2+7x+1$