Solution des exercices calculatoires

Thème 1 : Fractions Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

$a=\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}\times\dfrac{11}{7}$ $\quad b=\dfrac{2+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{5}}$ $\quad c=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{5}+1-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad d=\dfrac{15}{22}\times\dfrac{46}{35}\times\dfrac{77}{69}$ $\quad e=\dfrac{15}{11}\times\dfrac{77}{10}\div\dfrac{3}{14}$ $\quad f=\dfrac{1+\frac{1+\frac{1}{2}}{3}}{4}$

$g=\dfrac{1}{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}$ $\quad h=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$ $\quad i=\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{3}-\frac{7}{10}}$ $\quad j=(2\times3\times5\times11)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{11}\right)$ $\quad k=\dfrac{2\,021\times2\,022+2\,023\times23+1\,999}{2\,023\times2\,022-2\,021\times2\,022}$

Thème 1 : Fractions - Solutions

$a=-\frac{1}{35}$ $\quad b=-\frac{35}{6}$ $\quad c=\frac{3}{5}$ $\quad d=1$ $\quad e=49$ $\quad f=\frac{3}{8}$

$g=-12$ $\quad h=\frac{43}{30}$ $\quad i=\frac{31}{29}$ $\quad j=371$ $\quad k=\frac{2045}{2}$

Thème 2 : Identités remarquables Simplifier les nombres suivants :

$A=(2\sqrt{3}+3)^2$ $\quad B=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$ $\quad C=(-\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ $\quad D=(5-2\sqrt{7})(5+2\sqrt{7})$ $\quad E=(\sqrt{3}-2+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2+\sqrt{2})$ $\quad F=\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001}$

Thème 2 : Identités remarquables - Solutions

$A=21+12\sqrt{3}$ $\quad B=\frac{1}{6}$ $\quad C=5-2\sqrt{6}$ $\quad D=-3$ $\quad E=1+2\sqrt{6}$ $\quad F=2$

Thème 3 : Formes canoniques Mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

$f(x)=x^2+4x+6$ $\quad g(x)=x^2-6x+21$ $\quad h(x)=x^2+x+7$ $\quad k(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$ $\quad \ell(x)=x^4-3x^2-\frac{1}{4}$ $\quad m(x)=3x^2+7x+1$

Thème 3 : Formes canoniques - Solutions

$f(x)=(x+2)^2+2$ $\quad g(x)=(x-3)^2+12$ $\quad h(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}$ $\quad k(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad \ell(x)=\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ $\quad m(x)=3\left(x^2+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{37}{12}$

Thème 4 : Racines carrées

Mettre les nombres suivants sous la forme de $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{N}$, b le plus petit possible ou simplifier au mieux les nombres suivants :

$A=\sqrt{50}+\sqrt{18}$ $\quad B=3\sqrt{75}-\sqrt{27}$ $\quad C=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ $\quad D=\left(\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^4$ $\quad E=\sqrt{24}\times\sqrt{56}$ $\quad F=(4+\sqrt{11})^2-(4-\sqrt{11})^2$

$G=\sqrt{2^2\times3^3\times5^5}$ $\quad H=\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$ $\quad I=\sqrt{2^{11}\times7^5\times5^{10}}$ $\quad J=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ $\quad K=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\quad L=\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Thème 4 : Racines carrées - Solutions

$A=8\sqrt{2}$ $\quad B=12\sqrt{3}$ $\quad C=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ $\quad D=20$ $\quad E=8\sqrt{21}$ $\quad F=16\sqrt{11}$

$G=150\sqrt{15}$ $\quad H=3$ $\quad I=49\,000\sqrt{14}$ $\quad J=5+3\sqrt{3}$ $\quad K=\frac{-23+7\sqrt{6}}{47}$ $\quad L=\sqrt{2}$

Thème 5 : Puissances de 10 Mettre les nombres suivants sous forme d'écriture scientifique :

$a=0{,}001^3$ $\quad b=2000^8$ $\quad c=0{,}03^4$ $\quad d=3\times10^{-7}-0{,}000005$ $\quad e=24\times10^{-6}+3\times10^{-5}-140\times10^{-7}$ $\quad f=13\times10^9+70\times10^8-3\times10^{10}$

$g=10^{-4}\times0{,}1^{-3}$ $\quad h=20^3\times0{,}02^{-2}$ $\quad i=\dfrac{0{,}01^{-2}\times1000^{-4}}{100^2\times0{,}001^3}$ $\quad j=\dfrac{(625\times0{,}5)^2}{1{,}25^3}$ $\quad k=\dfrac{1{,}6^4}{0{,}032^3\times6400^{-1}}$ $\quad \ell=\dfrac{4\times10^{-8}+0{,}0000005}{29\times10^{-6}-20\times10^{-7}}$

Thème 5 : Puissances de 10 - Solutions

$a=10^{-9}$ $\quad b=2{,}56\times10^{26}$ $\quad c=8{,}1\times10^{-7}$ $\quad d=4{,}7\times10^{-6}$ $\quad e=4\times10^{-5}$ $\quad f=-1\times10^{10}$

$g=10^{-1}$ $\quad h=2\times10^7$ $\quad i=10^5$ $\quad j=5\times10^4$ $\quad k=1{,}28\times10^9$ $\quad \ell=2\times10^{-2}$

Thème 6 : Puissances Exprimer les nombres suivants sous la forme d'une puissance de 2, 3 et 5. ($2^x\times3^y\times5^z$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$)

$A=12^3$ $\quad B=25^2$ $\quad C=\dfrac{81^2}{27^3}$ $\quad D=\dfrac{20^3\times4^{-2}}{5^{-2}\times50^2}$ $\quad E=\dfrac{6^5\times9^{-2}}{8^2}$ $\quad F=\dfrac{2^5\times15^{-3}\times9^5}{18^{-3}\times10^2}$

$G=\dfrac{(3^2)^3\times(2^3)^2}{(2^2)^3\times(3^3)^2}$ $\quad H=\dfrac{3^{2^3}\times2^{3^2}}{2^{2^3}\times3^{3^2}}$ $\quad I=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(-\dfrac{9}{2}\right)^3$ $\quad J=\dfrac{27\times10^4\times(6^2\times5)^{-2}}{(3^{-1}\times10)^{-3}}$ $\quad K=\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}}$ $\quad L=2^{2^{2^2}}$

Thème 6 : Puissances - Solutions

$A=2^6\times3^3$ $\quad B=5^4$ $\quad C=3^{-1}$ $\quad D=5$ $\quad E=2^{-1}\times3^1$ $\quad F=2^6\times3^{13}\times5^{-5}$

$G=2^0\times3^0=1$ $\quad H=2^1\times3^{-1}$ $\quad I=2^{-2}\times3^3$ $\quad J=2^3\times3^{-4}\times5^5$ $\quad K=2$ $\quad L=2^{16}$

Thème 7 : Suites géométriques Mettre les expressions suivantes sous la forme $a\times b^n$, avec $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$:

$a_n=2^{n+1}-2^n$ $\quad b_n=2^{2n}\times3^{-n}$ $\quad c_n=4^{n+1}-2^{2n-3}$

$d_n=2(3^{n+1}-3^n)-3^n$ $\quad e_n=(-1)^{n+1}2^{2-3n}$ $\quad f_n=2\times(-4)^n+(-1)^{n+1}2^{2n+3}$

$g_n=\dfrac{-3\times4^{n+1}}{2^{n+1}}$ $\quad h_n=\dfrac{6^{n-1}}{3^n}$ $\quad i_n=1+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k$

$j_n=\dfrac{2^{3n+2}}{3^{2n-1}}$ $\quad k_n=\dfrac{2\left(2^{n+1}-2^n\right)}{3^n\left(3^n-3^{n-1}\right)}$ $\quad \ell_n=\dfrac{4^n-2^{2n-1}}{9^n+(-3)^{2n}}$

Thème 7 : Suites géométriques - Solutions

$a_n=2^n$ $\quad b_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n$ $\quad c_n=\frac{31}{8}4^n$ $\quad d_n=3.3^n$ $\quad e_n=-4\left(-\frac{1}{8}\right)^n$ $\quad f_n=-6(-4)^n$

$g_n=-6.2^n$ $\quad h_n=\frac{1}{6}2^n$ $\quad i_n=2.2^n$ $\quad j_n=12\left(\frac{8}{9}\right)^n$ $\quad k_n=3\left(\frac{2}{9}\right)^n$ $\quad \ell_n=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

Thème 8 : Développements et décomposition en éléments simples

$A(x)=3(x-2)(x+1)$ $\quad B(x)=\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x-4}{5}+\dfrac{1-x}{6}-x$ $\quad C(x)=x(x-2)(x+3)-x^2(x+1)$ $\quad D(x)=5(x-4)^2-11$ $\quad E(x)=(2+x)^3$

$F(x)=(x-2)^2(2x+3)-(3x+2)^2(x+5)$ $\quad G(x)=(3x-1)^3$ $\quad H(x)=(x-1)(x^2+x+1)-(x+1)(x^2-x+1)$ $\quad J(x)=(x^2+\sqrt{2}x+1)(1-\sqrt{2}x+x^2)$

Thème 8 : Développements - Solutions

$A(x)=3x^2-3x-6$ $\quad B(x)=\dfrac{-31x+49}{30}$ $\quad C(x)=-6x$ $\quad D(x)=5x^2-40x+69$ $\quad E(x)=8+12x+6x^2+x^3$

$F(x)=-7x^3-62x^2-68x-8$ $\quad G(x)=27x^3-27x^2+9x-1$ $\quad H(x)=x^3-1$ $\quad I(x)=x^3+1$ $\quad J(x)=x^4+1$

$\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \dfrac{4}{4x^2-1}=\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{2}{2x+1}$ $\quad \dfrac{4x}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{x-3}$ $\quad \dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}=\dfrac{-3}{x-2}+\dfrac{5}{x-3}$

Thème 9 : Factorisation ou mise au même dénominateur

$a(x)=(x-2)(3x+5)-(2x-1)(2x-4)$ $\quad b(x)=x^2-5x+\dfrac{25}{4}$ $\quad c(x)=4x^2-1+(x-3)(2x+1)$ $\quad d(x)=(x-1)^2-4$

$e(x)=(3x-5)^2-(x-7)^2$ $\quad f(x)=3x-6+(x+1)(x-2)$ $\quad g(x)=x^2-49-3x(7-x)$ $\quad h(x)=(5x+2)(3x-7)+(5x+2)$

$k(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{5}{(x-3)^2}$ $\quad \ell(x)=x^4-1$ $\quad i(x,y)=x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ $\quad j(x,y)=x^2+6xy+9y^2-169x^2$

Thème 9 : Factorisation ou mise au même dénominateur - Solutions

$a(x)=(x-2)(-x+7)$ $\quad b(x)=(x-\frac{5}{2})^2$ $\quad c(x)=(2x+1)(3x-4)$ $\quad d(x)=(x-3)(x+1)$

$e(x)=8(x+1)(x-3)$ $\quad f(x)=(x-2)(x+4)$ $\quad g(x)=(x-7)(4x+7)$ $\quad h(x)=3(5x+2)(x-2)$

$k(x)=\frac{2x-11}{(x-3)^2}$ $\quad \ell(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $\quad i(x,y)=(x+1)^2(x+y)$ $\quad j(x,y)=(14x+3y)(-12x+3y)$

Thème 10 : Second degré

Trouver mentalement les racines des trinômes suivants sans passer par le calcul du discriminant ; on utilisera le résultat suivant :
Le produit des racines du trinôme ax^2+bx+c vaut $\frac{c}{a}$ et la somme $-\frac{b}{a}$

1. $x^2-24x+144$ **2.** x^2+3x **3.** $25x^2-256$ **4.** $x^2+166x-167$ **5.** $5x^2+24x+19$

6. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)$ **7.** $(x+a)(x+b)-(m+a)(m+b)$ **8.** $mx^2+(2m+1)x+2$ sachant que m est racine

Former un trinôme du second degré ayant pour racines les nombres suivants :

9. 7 et 11 **10.** $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$ **11.** $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ **12.** $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$

Déterminer l'ensemble des valeurs sur lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles :

13. $13-12x-x^2$ **14.** $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$ **15.** $\dfrac{3x-1}{-x^2+6x-9}$

En admettant que les trinômes suivants ont deux racines distinctes, déterminer le signe de ces racines sans les calculer :

16. $15x^2-167x+11$ **17.** $17x^2+674x-13$ **18.** $23x^2+451x+17$

Thème 10 : Second degré - Solutions

1. 12 **2.** 0 et -3 **3.** $\pm\frac{16}{5}$ **4.** 1 et -167 **5.** -1 et $-\frac{19}{5}$

6. $\frac{a-b}{b-c}$ et 1 **7.** m et $-(m+a+b)$ **8.** m et $\frac{2}{m^2}$

9. $x^2-18x+77$ **10.** x^2-4x-1 **11.** $x^2-2mx+3$ **12.** $m^2x^2-m(2m-1)x+(m^2-m-2)$

13. $[-13;1]$ **14.** $]-\infty;1]\cup[\sqrt{2};+\infty[$ **15.** $]-\infty;\frac{1}{3}]\cup\{3\}$

16. les racines sont de signe strictement positif **17.** les racines sont de signes contraire **18.** les racines sont de signe strictement négatif

Thème 11 : Polynômes

Factoriser les polynômes suivants en cherchant des racines évidentes : **a.** x^3+2x^2-x-2 **b.** x^3+2x+3

Thème 11 : Polynômes- Solutions

a. $(x-1)(x+1)(x-2)$ **b.** $(x+1)(x^2-x+3)$

Thème 12 : Valeur absolue

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a. $|x-6|=2$ **b.** $|x+5|=\frac{1}{2}$ **c.** $|5-2x|=1$ **d.** $|x-7|<10^{-1}$ **e.** $|3x+5|\geq 1$

f. $|5x-6|>0$ **g.** $|4+7x|\leq -\frac{1}{3}$ **h.** $\big|5-|x-1|\big|=2$ **i.** $\big||x-1|-3\big|\leq 1$ **j.** $\big||2x-6|+2\big|\geq 3$

Thème 12 : Valeur absolue - Solutions

a. $\mathscr{S}=\{4;8\}$ **b.** $\mathscr{S}=\left\{-\frac{-11}{2};-\frac{-9}{2}\right\}$ **c.** $\mathscr{S}=\{2;3\}$ **d.** $\mathscr{S}=]6,9;7,1[$ **e.** $\mathscr{S}=]-\infty;-2]\cup\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$

f. $\mathscr{S}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{6}{5}\right\}$ **g.** $\mathscr{S}=\emptyset$ **h.** $\mathscr{S}=\{-6;-2;4;8\}$ **i.** $\mathscr{S}=[-3;-1]\cup[3;5]$ **j.** $\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

Thème 13 : Exponentielle

Simplifier les expressions suivantes :

$A(x)=\left(e^{2x+1}\right)^3\times\left(e^{-3x}\right)^2$ $\quad B(x)=\sqrt{e^{4x^2-16}}$ $\quad C(x)=e^x(1+2e^{-x})$ $\quad D(x)=\sqrt{e^{x^2}}$ $\quad E(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ $\quad F(x)=(e^x+1)^2-\sqrt{e^{4x}}-1$

$G(x)=\dfrac{e^{x^2+x}}{e^x}$ $\quad H(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}$ $\quad I(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{4x}}{e^{2x}+1}$ $\quad J(x)=\left(\dfrac{1}{e^x}\right)^3\times\dfrac{(e^x)^2}{e}$ $\quad K(x)=\dfrac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$ $\quad L(x)=\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^x}+\dfrac{e^{-x}+e^x}{1-e^{-x}}$

Thème 13 : Exponentielle - Solutions

$A(x) = e^3$ $\quad B(x) = e^{2x^2-8}$ $\quad C(x) = e^x + 2$ $\quad D(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ $\quad E(x) = 4$ $\quad F(x) = 2e^x$

$G(x) = e^{x^2}$ $\quad H(x) = 1 + e^{-2x}$ $\quad I(x) = e^{2x}$ $\quad J(x) = e^{-x-1}$ $\quad K(x) = e^{4x}$ $\quad L(x) = 0$

Thème 14 : logarithme

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

$a = \ln 2048$ $\quad b = \ln \frac{1}{4}$ $\quad c = 3\ln\frac{1}{8} + 4\ln\frac{1}{5}$ $\quad d = \ln\frac{1}{18}$ $\quad e = \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln\frac{7}{8}$ $\quad f = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ldots + \ln\frac{498}{499} + \ln\frac{499}{500}$

Simplifier les expressions suivantes :

$g(x) = e^{3\ln x}$ $\quad h(x) = \ln(\sqrt{e^x})$ $\quad i(x) = \ln\frac{e^x}{2}$ $\quad j(x) = e^{-2\ln x}$ $\quad k(x) = \ln(e^{-\frac{x}{2}})$ $\quad l(x) = \ln\frac{1}{e^{2x}}$

Transformation d'expressions grâce au logarithme :

$m(x) = 2^x$ $\quad n(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad o(x) = x^{\ln x}$

Thème 14 : logarithme - Solutions

$a = 11\ln 2$ $\quad b = -2\ln 2$ $\quad c = -9\ln 2 - 4\ln 5$ $\quad d = -\ln 2 - 2\ln 3$ $\quad e = 9\ln 2 + \ln 3$ $\quad f = -2\ln 2 - 3\ln 5$

$g(x) = x^3$ $\quad h(x) = \frac{e}{2}$ $\quad i(x) = x - \ln 2$ $\quad j(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad k(x) = -\frac{x}{2}$ $\quad l(x) = -2x$

$m(x) = e^{x\ln 2}$ $\quad n(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ $\quad o(x) = e^{(\ln x)^2}$

Thème 15 : Dérivation

Sans se préoccuper des domaines de dérivabilité, calculer formellement les dérivées des fonctions suivantes :

$A(x) = (x^2-3)\sqrt{x}$ $\quad B(x) = (3x^2-2x-1)e^x$ $\quad C(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$ $\quad D(x) = \sqrt{x^2-x+3}$ $\quad E(x) = (4x-7)^{\frac{5}{3}}$ $\quad F(x) = (x^2-4x+5)^5$

$G(x) = 2^x$ $\quad H(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+4}$ $\quad I(x) = \dfrac{1}{(3x-7)^4}$ $\quad J(x) = \ln(\ln x)$ $\quad K(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3x+1}$ $\quad L(x) = \dfrac{3x-5}{e^{2x}}$

Thème 15 : Dérivation - Solutions

$A'(x) = \dfrac{(5x^2-3)\sqrt{x}}{2x}$ $\quad B'(x) = (3x^2+4x-3)e^x$ $\quad C'(x) = xe^{\frac{1}{2}x^2}$ $\quad D'(x) = \dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-x+3}}{2x^2-2x+6}$

$E'(x) = \frac{5}{3}(4x-7)^{\frac{2}{3}}$ $\quad F'(x) = 10(x-2)(x^2-4x+5)^4$ $\quad G'(x) = \ln 2 \times 2^x$ $\quad H'(x) = \dfrac{x^2+8x+13}{(x+4)^2}$

$I'(x) = \dfrac{-12}{(3x-7)^5}$ $\quad J'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad K'(x) = \dfrac{(x^2-5x+4)e^x}{(x^2-3x+1)^2}$ $\quad L'(x) = \dfrac{13-6x}{e^{2x}}$

Thème 16 : Primitives

Sans se préoccuper des domaines, calculer formellement une primitive des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ $\quad h(x) = e^{5x-1}$ $\quad i(x) = \dfrac{3x^2}{2+x^3}$ $\quad j(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3+x^2}}$ $\quad k(x) = 3xe^{2x^2-1}$

$l(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ $\quad m(x) = \dfrac{8e^{2x}}{(3-e^{2x})^3}$ $\quad n(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{x^2}$ $\quad p(x) = \dfrac{1-x^6}{1-x^2}$ $\quad q(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$ $\quad r(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$

Thème 16 : Primitives - Solutions

$F(x) = \ln(x-1)$ $\quad G(x) = \dfrac{-3}{x-2}$ $\quad H(x) = \frac{1}{5}e^{5x-1}$ $\quad I(x) = \ln(2+x^3)$ $\quad J(x) = 5\sqrt{3+x^2}$ $\quad k(x) = \frac{3}{4}e^{2x^2-1}$

$L(x) = \frac{1}{3}\ln^3 x$ $\quad M(x) = \dfrac{1}{(3-e^{2x})^4}$ $\quad N(x) = 3x + \ln x + \dfrac{4}{x}$ $\quad P(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$ $\quad Q(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 4x$ $\quad r(x) = x - 4\ln(x+1)$

Thème 17 : Calcul intégral

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \displaystyle\int_{-1}^{2} 3x^2+4x-5\,\mathrm{d}x$ $\quad B = \displaystyle\int_{-1}^{1} 6x^5-4x^3+7x\,\mathrm{d}x$ $\quad C = \displaystyle\int_{0}^{1} 3\sqrt{x}-4x\,\mathrm{d}x$ $\quad D = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$ $\quad E = \displaystyle\int_{0}^{2} |x^2-3x+2|\,\mathrm{d}x$

$F = \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $\quad G = \displaystyle\int_{-1}^{2} e^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad H = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ $\quad I = \displaystyle\int_{-1}^{2} (3x-2)^3\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \displaystyle\int_{0}^{2} e^{\frac{1}{2}x+2}\,\mathrm{d}x$

Thème 17 : Calcul intégral - Solutions

$A = 0$ $\quad B = 0$ $\quad C = 0$ $\quad D = -\dfrac{3}{8}$ $\quad E = 1$

$F = \frac{1}{2}\big(\ln(5)\big)^2$ $\quad G = \frac{1}{2}(e^3 - e^{-3})$ $\quad H = \ln 2$ $\quad I = \frac{1}{12}(4^4 - 5^4)$ $\quad J = 2(e^3 - e^2)$

Thème 18 : Intégration par parties

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties judicieusement choisie :

$\alpha = \displaystyle\int_0^2 te^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ $\quad \beta = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+1}{e^t}\,\mathrm{d}t$ $\quad \gamma = \displaystyle\int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t$ $\quad \delta = \displaystyle\int_1^4 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ $\quad \epsilon = \displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-3)e^{2t}\,\mathrm{d}t$

Thème 18 : Intégration par parties - Solutions

Calculer les intégrales suivantes en effectuant une intégration par parties judicieusement choisie :

$\alpha = 4$ $\quad \beta = 2 - \frac{3}{e}$ $\quad \gamma = 1$ $\quad \delta = 4(2\ln 2 - 1)$ $\quad \epsilon = 2 - \frac{e^2}{2}$

Thème 19 : Sommes et produits

Calculer les sommes suivantes :

$a=\sum_{k=1}^{n+2} k$ $\qquad b=\sum_{k=2}^{n+1} 3k$ $\qquad c=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)$ $\qquad d=\sum_{k=1}^{n+2}$ $\qquad e=\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ $\qquad f=\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 5^{n+1-k}$

Calculer les sommes suivantes :

$g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i$ $\qquad h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ $\qquad \ell=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} ij$

Calculer les produits suivants :

$m=\prod_{k=1}^{n} 3$ $\qquad o=\prod_{k=1}^{n} 2^k$ $\qquad p=\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ $\qquad q=\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

Thème 19 : Sommes et produits - Solutions

$a=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ $\qquad b=3\frac{n(n+3)}{2}$ $\qquad c=d\,\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ $\qquad d=n+2$ $\qquad e=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$ $\qquad f=\frac{25}{3}(5^n-2^n)$

$g=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad h=\frac{n(n+3)}{4}$ $\qquad \ell=\frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{24}$

$m=3^n$ $\qquad o=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\qquad p=n+1$ $\qquad q=\frac{1}{n}$

Thème 20 : Changements de variables et d'indices

Calculer les intégrales suivantes en suivant le changement de variable indiqué :

$A=\int_0^2 \frac{x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$ avec $u=2+x^3$ $\qquad B=\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$ avec $u=\sqrt{2x-1}$ $\qquad C=\int_0^1 \frac{1}{2+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ avec $u=e^x$

Calculer les sommes suivantes en suivant le changement d'indice indiqué :

$D=\sum_{k=0}^{n} n-k$ avec $i=n-k$ $\qquad E=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}$ avec $i=n+1-k$ $\qquad F=\sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^3$ avec $k=j-2$

Thème 20 : Changements de variables et d'indices - Solutions

$A=\frac{1}{3}\ln 5$ $\qquad B=\frac{26}{3}$ $\qquad C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e+1}{3}\right)$

$D=\frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad E=0$ $\qquad F=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Thème 21: Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a. $\begin{cases} x+4y=1 \\ 2x-5y=-11 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 15x-21y=-51 \\ -10x+14y=34 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 4x-3y=11 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x-y+3z=13 \\ x+4y-z=-10 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases}$ **g.** $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases}$

Thème 21: Systèmes linéaires - Solutions

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a. $\mathscr{S}=\{(-3;1)\}$ **b.** $\mathscr{S}=\left\{\left(x,\frac{5}{7}x+\frac{17}{7}\right),x\in\mathbb{R}\right\}$ **c.** $\mathscr{S}=\{(2;-1)\}$ **d.** $\mathscr{S}=\{(z+1,-z,z),z\in\mathbb{R}\}$

e. $\mathscr{S}=\{(1;-2;3)\}$ **f.** $\mathscr{S}=\emptyset$ **g.** $\mathscr{S}=\{(5z;-4z+1,z),z\in\mathbb{R}\}$

Thème 22 : Factorielles et coefficients binomiaux

Simplifier et si possible donner la valeur des expressions suivantes :

$a=\frac{51!}{49!}$ $\qquad b=\frac{11!}{8!}$ $\qquad c=\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$ $\qquad d=\binom{6}{4}$ $\qquad e=\binom{12}{3}$ $\qquad f=\binom{n+1}{3}$ avec $n\geq 3$

Autour du binôme de Newton :

1. Développer $(1+2x)^5$ $\qquad$ **2.** Factoriser $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ $\qquad$ **3.** Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

Thème 22 : Factorielles et coefficients binomiaux - Solutions

$a=2550$ $\qquad b=990$ $\qquad c=\frac{7}{6!}$ $\qquad d=15$ $\qquad e=220$ $\qquad f=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$

1. $(1+2x)^5=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$ $\qquad$ **2.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$ $\qquad$ **3.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

Thème 23 : Calcul matriciel

Soient A, B, C, D et E les cinq matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1&2\\5&-4\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&5&0\\1&3&4\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\0&-2&4\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad E=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\-2&0\end{pmatrix}$

a. Calculer les produits suivants : $A\times E$, $\quad B\times D$, $\quad A\times C$, $\quad C\times E$, $\quad E\times C$, $\quad {}^tD\times B$, $\quad A^2$, $\quad A^3$ et B^2

b. Calculer les inverses des matrices suivantes : $\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&-3\\0&0&5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\3&-1&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

Thème 23 : Calcul matriciel - Solutions

a. le produit $A\times E$ n'est pas licite, $B\times D=\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}$, $A\times C=\begin{pmatrix}-1&-6&9\\-5&-2&-11\end{pmatrix}$, $C\times E=\begin{pmatrix}-6&1\\-10&0\end{pmatrix}$, $E\times C\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}$, ${}^tD\times B=\begin{pmatrix}3&2&6\end{pmatrix}$,
$A^2=\begin{pmatrix}11&-6\\-15&26\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}-19&46\\115&-134\end{pmatrix}$ et $B^2=\begin{pmatrix}3&-3&-6\\0&25&0\\6&27&15\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&-3\\0&0&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10&0&4\\0&5&3\\0&0&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\3&-1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5/2&1&-1/2\\3/2&1&-1/2\\3&-1&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&-1&-1&1\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1&0&-1\\1&1&0&0\\-1&0&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

Thème 24 : Equations différentielles

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'=4y$ et $y(0)=20$ **2.** $y'=-y+12$ et $y(0)=4$ **3.** $y'=2y+5$ et $y(0)=20$
4. $y''-y=0$ avec $y(0)=5$ et $y'(0)=5$ **5.** $y''-4y'+3y=0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=2$ **6.** $y''+4y'+4y=0$ avec $y(1)=1$ et $y'(1)=-3$

Thème 24 : Equations différentielles - Solutions

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\{x\mapsto 20e^{4x}\}$ **2.** $\{x\mapsto -8e^{-x}+12\}$ **3.** $\{x\mapsto \frac{45}{2}e^{2x}-\frac{5}{2}\}$
4. $\{x\mapsto 5e^{x}\}$ **5.** $\{x\mapsto \frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{x}\}$ **6.** $\{x\mapsto (2-x)e^{2-2x}\}$

Thème 25 : Séries

Dans chaque cas, donner l'argument qui permet de justifier que la série concernée est convergente et calculer la somme indiquée :

$A=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ $B=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ $C=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^{k+1}}$ $D=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ $E=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$

$F=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)}{3^{k-2}}$ $G=\sum_{k=2}^{\infty}k2^{-k}$ $H=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{k!}$ $I=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ $J=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{k!}$

Thème 25 : Séries - Solutions

$A=\frac{3}{2}$ $B=\frac{1}{2}$ $C=\frac{1}{4}$ $D=\frac{16}{9}$ $E=21$
$F=\frac{27}{42}$ $G=\frac{3}{2}$ $H=e^3$ $I=e$ $J=2e^2-6$