TD1 - Suites et séries

1 Suites

Exercice 1 ⋆

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{2n!}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 2 ⋆

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}, \quad v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec } 0 \leq a < b,$$

$$w_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Exercice 3 ⋆⋆

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}, \quad v_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}, \quad w_n = \sqrt[n]{n},$$

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}, \quad y_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right),$$

$$z_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad t_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}.$$

Exercice 4 ⋆⋆

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}$.

Exercice 5 ⋆⋆

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq 2$.
2. En déduire que u_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 ⋆⋆

On pose :

$$\begin{cases} u_0 &= 2, \\ u_1 &= 0, \\ u_2 &= 7, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} &= 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On note :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier naturel n, que vaut le produit MX_n ? En déduire X_n en fonction de M et X_0.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, la première ligne de M^n est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire pour tout n entier naturel, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit (u_n) une suite définie par $u_1 > 0$ et pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \geq u_1$.
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1$.
3. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 8 ⋆ ⋆ ⋆

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1, \quad v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^3 - n}$$

$$w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right).$$

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite à termes positifs vérifiant que : $u_n = o_{n\to+\infty}(\sqrt{n})$. On pose alors :

$$v_n = \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de $\ln(v_n)$ puis en déduire la limite de (v_n).

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Prouver que f est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
   (b) Calculer x_1. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, comparer $f(n)$ et n. En déduire que $x_n \leq n$.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, $n-\ln n \leq x_n$.
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n}$.

2 Séries

Exercice 11 ⋆

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et le cas échéant, calculer leurs sommes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}, \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n-1}, \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$D = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{3^n}{4^{n+1}} \quad \text{et} \quad E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}.$$

Exercice 12 ⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$
   et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Montrer que la série de terme général $(n^2-1)u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13 ⋆⋆

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(2-\mathrm{e}^{1/n}).$$

Exercice 14 - Série-intégrale ⋆⋆

On s'intéresse à la nature de la série de terme général $\frac{1}{k\ln k}$ pour $k \geq 2$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$:
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln k}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$
3. Conclure.
4. Montrer que :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 15 - Une série alternée ⋆⋆

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On pose S_n la somme partielle de la série de terme général u_n.

1. La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
3. En déduire que $\sum u_n$ converge.

Exercice 16 ⋆⋆

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \geq 1$:
$$\frac{k}{4k^2-1} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1}.$$

2. En déduire que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 17 ⋆⋆

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $u_k = \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général u_k converge.
2. En factorisant $k(k+3)+2$, déterminer une suite $(v_k)_{k\geq 1}$ telle que $u_k = v_{k+1} - v_k$.
3. En déduire la valeur de la série des u_k.

Exercice 18 ⋆⋆⋆

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries suivantes en fonction de α :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln(n)^\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\mathrm{e}^{n^\alpha} - 1}.$$

Exercice 19 - Constante d'Euler ⋆⋆⋆

Pour $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1).$$

Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 20 - Séries alternées ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0. On souhaite montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

la somme partielle de la série.

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$ converge.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

le reste de la série. En considérant séparément le cas n pair et le cas n impair, montrer que pour tout n entier naturel :

$$0 \leq |R_n| \leq u_{n+1}.$$

Exercice 21 - Formule de Stirling ⋆⋆⋆⋆

On veut montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Pour cela, on pose :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

1. Montrer que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
2. En déduire que la série des v_n converge. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
3. Conclure.

3 Séries doubles

Exercice 22 ⋆⋆

La série double $\sum_{n\geq 1, m\geq 0} \frac{(-1)^{n+m}2^m}{n\times m!}$ converge-t-elle ?

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Les séries doubles suivantes convergent-elles ? Si oui, calculer leurs sommes.

$$\sum_{m\geq 0, n\geq 0} \frac{1}{2^{m+n}m!}, \quad \sum_{m\geq 0, n\geq 0} \frac{(-1)^m n^m}{m!},$$

$$\sum_{m\geq 1, n\geq 0} \frac{n+m-1}{2^{m+n-2}}.$$

Exercice 24 ⋆⋆⋆

Pour quelles valeurs de α la série double $\sum_{m\geq 1, n\geq 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$ converge-t-elle ?

4 Exercices de concours

Exercice 25 - QSP HEC 2008 ⋆⋆⋆⋆

Répresenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées (a,b) tels que $a>0$, $b>0$ et la série de terme général :

$$u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$$

soit convergente.

Exercice 26 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆

On considère une suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & > & 0, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2}{n+1}. \end{cases}$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, v_n est bien définie.
2. (a) Montrer que la série de terme général $\frac{\ln k}{2^k}$ converge.
   (b) On pose donc :
   $$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$
   Montrer que la suite (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de u_0 et de σ.
3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$. Étudier le comportement de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$
   (b) En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 27 - QSP HEC 2014 ⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $n\geq 1$, on pose :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer la somme de cette série.

Exercice 28 - QSP ESCP 2006 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, il existe un unique $y_n\in\mathbb{R}_+^\star$ tel que $\ln(y_n)+y_n = \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et si on note ℓ sa limite, déterminer un équivalent de $y_n-\ell$.

Exercice 29 - Oral HEC 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0=1$ et pour tout n entier :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n.$$

1. Écrire une fonction `Python` ayant pour argument un entier n et renvoyant $\sum_{k=0}^n u_k$.
2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:
   $$v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$
   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de $x\mapsto\ln(1+x)$.
   (b) Montrer que :
   $$\ln v_n = (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).$$
   Pour quelle valeur α_0 du réel α la série de terme général $\ln v_n$ est-elle convergente ?

   On considérera désormais le cas $\alpha=\alpha_0$.

   (c) Expliciter $\sum_{k=1}^n \ln(v_k)$ et en déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$
   Qu'en déduit-on pour la série $\sum u_n$?
   (d) Justifier l'existence d'un réel strictement positif D (indépendant de n) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
   $$\sum_{k=0}^n ku_k \leq D\sqrt{n}.$$
3. (a) Établir pour tout entier naturel n, la relation :
   $$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.