RÉDACTION 2 - RÉCURRENCE

Certaines démonstrations ont une structure tellement particulière que le concile des mathématiciens leur a donné des noms spécifiques. Nous nous penchons dans cette fiche sur la démonstration par *récurrence*.

1 Récurrence simple

Dans le cadre du raisonnement par récurrence, on cherche à montrer qu'une *collection infinie* de propositions numérotées sont toutes vraies. Si pour chaque entier n, on note $\mathcal{P}_n$ la proposition numérotée correspondante, le principe du raisonnement par récurrence peut se résumer de la manière suivante :

1. On montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie. Formellement, on montre : $\mathcal{P}_0$.
2. On montre que pour tout n entier, si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie. Formellement, on montre : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

Le principe de récurrence nous dit que si ces deux conditions sont réunies, alors effectivement toutes les propositions $\mathcal{P}_n$ sont vraies, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Formellement, le principe de récurrence s'écrit : $(\mathcal{P}_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n)$.

Méthode

Pour montrer par récurrence un résultat de la forme :

`Pour tout entier naturel` n`,` $\mathcal{P}_n$ `est vraie`

on rédige de la manière suivante :

✓ Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation :** Vérifions que $\mathcal{P}_0$ est vraie.

  ⋮
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.

  ⋮

Remarque :

Il y a deux erreurs qu'il faut absolument éviter.

1. D'abord, écrire pour l'hérédité :

   ✗ Supposons que pour tout n entier, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

   Supposer cela, c'est supposer le résultat. Et il n'y a alors plus rien à montrer ! Attention donc, il faut bien fixer le n dans la rédaction.
2. Ensuite, même si cela est moins grave, il faut éviter :

   ✗ Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n entier.

   La phrase est ambiguë et on peut comprendre la phrase suivante :

   ✗ Supposons qu'il existe un n entier tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

   Or dans ce cas, le quantificateur utilisé est « il existe » et non « pour tout » comme le principe de récurrence le nécessite.

Remarque :

Il n'est pas indispensable de commencer à $n = 0$. Parfois, une série de propriétés $\mathcal{P}_n$ n'est vraie qu'à partir de $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$. Dans ce cas, il faut simplement adapter la rédaction.

Exemple : On veut montrer que pour pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^\star$ pour lesquels :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

✓ Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^\star$ pour lesquels :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

- **Initialisation :** Montrons qu'il existe 3 entiers que l'on notera a_1, a_2 et a_3 tels que :

$$a_1 < a_2 < a_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1.$$

Pour cela, proposons une solution et posons :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3 \quad \text{et} \quad a_3 = 6.$$

Ces nombres sont correctement ordonnés. Et on a bien :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Donc la récurrence est initialisée.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On suppose qu'il existe $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

Montrons qu'il existe $b_1, b_2, \dots, b_n$ et $b_{n+1} \in \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = 1.$$

Observons que :

$$\frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)} = \frac{1}{a_n}.$$

Cela nous pousse à poser :

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad \dots \quad b_{n-1} = a_{n-1}$$

et :

$$b_n = a_n + 1 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n(a_n + 1).$$

On a bien :

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}.$$

De plus, $a_n + 1 > a_n$ et donc $b_n > b_{n-1}$. On sait que $a_n \geq 1$. En fait, on a même $a_n > 1$ car sinon la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ serait supérieure à 1. On en déduit que $b_{n+1} = a_n(a_n + 1) > a_n + 1 = b_n$. D'où finalement :

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1} < b_n < b_{n+1}.$$

Pour finir, calculons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n} = 1.$$

Donc il existe bien b_1, b_2, ... , b_n et $b_{n+1} \in \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = 1.$$

On a donc bien par récurrence, l'existence pour tout $n \geq 3$ d'entiers a_1, a_2, ... , $a_n \in \mathbb{N}^\star$ tels que :

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

2 Récurrence double

Parfois, supposer que $\mathcal{P}_n$ est vraie ne suffit pas pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$. Dit autrement, savoir que la proposition marche pour un cas ne permet pas de conclure que cela marche pour le cas suivant. Dans ce cas, on peut faire une récurrence dite *double*. On montre que :

1. $\mathcal{P}_0$ est vraie.
2. $\mathcal{P}_1$ est vraie.
3. pour tout entier naturel n, si $\mathcal{P}_n$ est vraie **et** $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.

Si ces trois conditions sont remplies, alors la série de propositions est vraie.

Méthode

Pour montrer par récurrence **double** un résultat de la forme :

`Pour tout entier naturel` n, $\mathcal{P}_n$ `est vraie`

on rédige de la manière suivante :

✓ `Montrons par récurrence double que pour tout` n `entier naturel,` $\mathcal{P}_n$ `est vraie.`

- **Initialisation :** `Vérifions que` $\mathcal{P}_0$ `est vraie.`

  ⋮

  `Vérifions que` $\mathcal{P}_1$ `est vraie.`

  ⋮

- **Hérédité :** `Soit` $n \in \mathbb{N}$. `On suppose que` $\mathcal{P}_n$ `est vraie. On suppose également que` $\mathcal{P}_{n+1}$ `est vraie. Montrons que` $\mathcal{P}_{n+2}$ `l'est également.`

  ⋮

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4, \\ u_1 &= 5, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3$.

✓ Montrons par récurrence double le résultat sus-mentionné.

- **Initialisation :** Vérifions le résultat pour $n = 0$. On a d'une part $u_0 = 4$. D'autre part, on a :
$$2^0 + 3 = 4.$$
Donc, on a bien $u_0 = 2^0 + 3$.
Vérifions le résultat pour $n = 1$. On a d'une part $u_1 = 5$. D'autre part, on a :
$$2^1 + 3 = 5.$$
Donc, on a bien $u_1 = 2^1 + 3$.
La récurrence double est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2^n + 3$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3$. Montrons que :
$$u_{n+2} = 2^{n+2} + 3.$$
Pour cela, calculons :
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3 \times (2^{n+1} + 3) - 2 \times (2^n + 3) = 2^{n+1} \times (3 - 1) + 9 - 6 = 2^{n+2} + 3.$$
On a bien le résultat voulu.

On a donc bien par récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 2^n + 3.$$

Remarque :

Remarquez que je n'ai pas écrit :

✖ Vérifions le résultat pour $n = 0$. On a :
$$u_0 = 2^0 + 3 = 4.$$
Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Le problème est **qu'on ne sait pas** à ce stade que $u_0 = 2^0 + 3$. Dire cela, c'est admettre le résultat à prouver et dans ce cas, il n'y a plus rien à prouver.

3 Récurrence forte

Évidemment, on peut généraliser à des récurrences triples, quadruples, etc. Mais des fois, même cela ne suffit pas. Dans ce cas, on peut sortir une ultime arme : **la récurrence forte**. L'idée est de s'appuyer non pas sur un, deux ou trois cas précédents pour prouver une proposition, mais de s'appuyer sur la *totalité* des cas précédents. En pratique, on montre que :

1. $\mathcal{P}_0$ est vraie.
2. pour tout entier naturel n, si $\mathcal{P}_0$ est vraie, $\mathcal{P}_1$ est vraie, $\mathcal{P}_2$ est vraie,... et jusqu'à $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Si ces deux conditions sont remplies, alors effectivement pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Méthode

Pour montrer par récurrence **forte** un résultat de la forme :

`Pour tout entier naturel` n, $\mathcal{P}_n$ `est vraie`

on rédige de la manière suivante :

✓ `Montrons par récurrence forte que pour tout` n `entier naturel,` $\mathcal{P}_n$ `est vraie.`

- **Initialisation :** `Vérifions que` $\mathcal{P}_0$ `est vraie.`

  $\vdots$

- **Hérédité :** `Soit` $n \in \mathbb{N}$. `On suppose que` $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, `... jusqu'à` $\mathcal{P}_n$ `sont vraies. Montrons que` $\mathcal{P}_{n+1}$ `l'est également.`

  $\vdots$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes :

- $u_0 \geq 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 2^n u_0.$$

✓ Montrons le résultat ci-dessus par récurrence forte.

- **Initialisation :** Vérifions que $u_0 \leq 2^0 u_0$. En effet :

  $$2^0 u_0 = u_0.$$

  Comme l'égalité est vraie, l'inégalité large l'est aussi.

  La récurrence forte est initialisée.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_0 \leq 2^0 u_0$, $u_1 \leq 2^1 u_0$,... jusqu'à $u_n \leq 2^n u_0$. Montrons que :

  $$u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0.$$

  En effet, calculons :

  $$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0.$$

  Or $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$. Donc :

  $$\sum_{k=0}^{n} 2^k \geq 2^{n+1}.$$

  Puis, comme $u_0 \geq 0$:

  $$\sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 \geq 2^{n+1} u_0.$$

  D'où, en réinsérant dans l'inégalité précédente :

  $$u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0$$

  qui était le résultat recherché.

On a donc bien, par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq 2^n u_0.$$