DM 0 - Travail de vacances

Pour le vendredi 01/09/2023

Exercice 1 - Nature de séries

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+n+3}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 2 - Intégrales impropres

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t$;

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$.

Montrer la convergence et calculer :

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$;

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Problème 3 - Matrice d'endomorphisme

On pose $E = \mathbb{R}_2[x]$. On pose également l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & Q \end{array} \right.$ où Q désigne le polynôme défini par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. On pose $P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $P_1(x) = x + \frac{1}{2}$, $P_0(x) = 1$. Vérifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E.
3. Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$? En déduire la valeur de φ^3.
4. Expliciter la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse. En déduire la matrice de φ dans la base canonique de E.

Problème 4 - Convexité

1. Montrer que la fonction ln est concave.
2. En déduire pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$:
$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$
3. Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$:
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}.$$

Problème 5 - Une intégrale particulière

1. Soit $\alpha \geqslant 1$. Montrer que :
$$t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right).$$
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente si $\alpha \geqslant 1$.
3. Que dire de l'intégrale si $\alpha < 1$? *(On pourra distinguer $\alpha > 0$ et $\alpha \leqslant 0$)*