Correction DM 0

Exercice 1 - Nature de séries

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+n+3}$

On a $\frac{2n-1}{n^2+n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
Les deux termes sont positifs au voisinage de $+\infty$ donc par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+n+3}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ ont même nature.
Or, d'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ diverge.
Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2+n+3} \text{ est divergente.}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$

On a $\sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$. Donc $n-\sqrt{n} = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, c'est-à-dire :

$$n-\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Ainsi, par comparaison de séries de termes généraux positifs (au voisinage de $+\infty$), la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ et la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ont la même nature. Or la seconde est la série harmonique divergente.
Donc $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}} \text{ est divergente.}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

Idée : *la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge (critère de Riemann). Le facteur $\ln n$ fait légèrement augmenter les termes, mais $\ln n$ est plus petit que n'importe quelle puissance de n. On devrait donc pouvoir le compenser.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{5/4}} \times \dfrac{\ln n}{n^{1/4}}$. Or $\frac{\ln n}{n^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée). Donc :

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right).$$

Or $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ est une série convergente (critère de Riemann).
Donc par négligeabilité, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} \text{ converge}}$ (et même absolument).

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$. Or : $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

Ainsi $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. Et donc par composition de limites avec une fonction continue :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} \neq 0.$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \text{ diverge grossièrement.}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

On a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Les termes étant positifs, par comparaison de séries, la série a la même nature que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\boxed{\text{qui est divergente}}$ (critère de Riemann).

Exercice 2 - Intégrales impropres

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$. Donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$.
Or pout $t > \mathrm{e}$, $\ln t > 1$. Ainsi pour $t > \mathrm{e}$, on a $\frac{\ln t}{t} > \frac{1}{t}$. Or l'intégrale $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est divergente. Donc, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \text{ est divergente.}}$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$. Donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$.
On a : $\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge (critère de Riemann en $+\infty$).
Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\boxed{\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$

$t \mapsto \ln(t)$ est définie et continue sur $]0,1]$. Donc l'intégrale est généralisée en 0. Comme ln a une primitive connue, on va passer par le calcul direct.
Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\int_\epsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\epsilon^1 = -1 - \epsilon\ln\epsilon + \epsilon.$$

Or $\epsilon\ln\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to0^+]{} 0$ (croissance comparée). Donc $\int_\epsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\epsilon\to0^+]{} -1$.

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et :

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1.}$$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$. Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^A = \arctan(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est convergente et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

Problème 3 - Matrice d'endomorphisme

On pose $E = \mathbb{R}_2[x]$. On pose également l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & Q \end{array}\right.$ où Q désigne le polynôme défini par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

L'énoncé fait déjà une supposition implicite : $P(x+1) - P(x)$ définit bien un polynôme, de degré au plus 2 de surcroit.
C'est bien le cas. En effet, comme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, notons :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x+1) - P(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + (a+b)$$

qui définit bien un polynôme de degré au plus 2 (en fait de degré au plus 1).
Donc φ est bien défini et l'espace d'arrivé est bien E.
Vérifions la linéarité de φ. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[x]$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P_1 + P_2)(x) &= (\lambda P_1 + P_2)(x+1) - (\lambda P_1 + P_2)(x) \\ &= \lambda P_1(x+1) + P_2(x+1) - \lambda P_1(x) - P_2(x) \\ &= \lambda\underbrace{(P_1(x+1) - P_1(x))}_{=\varphi(P_1)(x)} + \underbrace{(P_2(x+1) - P_2(x))}_{=\varphi(P_2)(x)}. \end{aligned}$$

Donc φ est bien une application linéaire et comme elle va de E dans E, $\boxed{\text{c'est bien un endomorphisme de } E.}$

2. On pose $P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $P_1(x) = x + \frac{1}{2}$, $P_0(x) = 1$. Vérifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de E.

$\mathcal{B}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés : c'est donc une famille libre.
Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim E$, c'est une base de E.

3. Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$? En déduire la valeur de φ^3.

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(P_2)(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 = x + \frac{1}{2} = P_1(x),\\
\varphi(P_1)(x) &= (x+1) + \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} = 1 = P_0(x),\\
\varphi(P_0)(x) &= 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Or $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^3) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^3$. Il suffit donc de calculer la matrice à la puissance 3. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi^3 = 0.}$

4. Expliciter la matrice de passage de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse. En déduire la matrice de φ dans la base canonique de E.

Notons $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ la base canonique de E avec :

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x \quad \text{et} \quad Q_2(x) = x^2.$$

On a donc :

$$P_2 = \frac{1}{2}Q_2 + Q_0, \quad P_1 = Q_1 + \frac{1}{2}Q_0 \quad \text{et} \quad P_0 = Q_0.$$

Ainsi la matrice de passage de de la base canonique de E à la base $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Calculons rapidement l'inverse, en appliquant les mêmes opérations sur les lignes à la matrice et à l'identité :

$$\begin{array}{rcc}
 & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\leftrightarrow} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Donc l'inverse de la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$) est donnée par :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique de E est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) &= \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

La formule peut se vérifier directement en calculant les images des vecteurs de la base canonique.

Problème 4 - Convexité

1. Montrer que la fonction ln est concave.

La fonction ln est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Pour vérifier la concavité, il suffit de vérifier le signe de $\ln''$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
Ainsi ln est bien une fonction concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.

2. En déduire pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$:

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Commençons par remarquer que, puisque tous les termes sont positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &\Leftrightarrow \ln \sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leqslant \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leqslant \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.
\end{aligned}$$

Or puisque ln est concave, $-\ln$ est convexe et donc une inégalité de convexité (l'inégalité de Jensen) s'applique :

$$-\ln \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-\ln x_k).$$

En multipliant par -1, on trouve bien la dernière ligne de l'équivalence précédente. Et donc :

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1\times\cdots\times x_n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.}$$

3. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^\star)^n$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1\times\cdots\times x_n}.$$

Posons pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $y_i=\frac{1}{x_i}$. On a bien $y_i\in\mathbb{R}_+^\star$. Donc l'inégalité précédente s'applique. On a donc $\sqrt[n]{y_1\times\cdots\times y_n}\leqslant\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}$ c'est-à-dire :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\times\cdots\times\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}.$$

Tous les termes sont positifs et donc, en passant à l'inverse (qui est décroissante), on obtient :

$$\boxed{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1\times\cdots\times x_n}.}$$

Problème 5 - Une intégrale particulière

1. Soit $\alpha\geqslant 1$. Montrer que :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right).$$

On a :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} = \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t/2}}_{\xrightarrow[t\to0]{}0}\times e^{-t/2}$$

où la limite se trouve par croissance comparée pour $\alpha>1$ et est immédiate si $\alpha=1$. $\boxed{\text{On a bien } t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right).}$

2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente si $\alpha\geqslant1$.

Pour $\alpha\geqslant1$, la fonction $t\mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale est généralisée uniquement en $+\infty$.
De plus, $\int_0^{+\infty}e^{-t/2}dt$ est convergente. Et d'après la question précédente, par comparaison d'intégrales, l'intégrale $\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente (et même absolument puisqu'on a utilisé une négligeabilité).

3. Que dire de l'intégrale si $\alpha<1$? *(On pourra distinguer $\alpha>0$ et $\alpha\leqslant0$)*

(a) **Cas $\alpha>0$:** c'est-à-dire $\alpha\in]0,1[$. Dans ce cas, on a toujours :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} = \underbrace{t^{\alpha-1}e^{-t/2}}_{\xrightarrow[t\to0]{}0}\times e^{-t/2}$$

mais dans ce cas, la limite est une forme déterminée. Donc on a toujours $t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$.
Et donc, en $+\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge. En revanche, en 0, l'intégrande n'est plus définie et donc l'intégrale est également généralisée en 0.
Or, on a :

$$t^{\alpha-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{\alpha-1}$$

puisque $e^{-t} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 1$. Or, d'après le critère de Riemann (en 0), l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ converge pour $\alpha > 0$.
Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

$\boxed{\text{Et donc } \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \text{ est convergente.}}$

(b) **Cas $\alpha \leqslant 0$:** Avec un raisonnement similaire, $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.
Et de même, en 0, l'intégrale a la même nature que $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ qui cependant, cette fois-ci, diverge.
Ainsi, $\boxed{\text{pour } \alpha \leqslant 0, \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \text{ est divergente.}}$