Rédaction 3 - Implications et inclusions

Dans cette fiche, nous nous concentrons sur des raisonnements usuels qui ont des rédactions typiques. On ne les rédige pas toujours exactement de cette manière, mais la manière présentée a le mérite d'être correcte.

1 L'implication

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

A `implique` B.

on rédige de la manière suivante :

✓ `On suppose` A. `Montrons que` B.
$\vdots$

Exemple : On veut montrer que pour tout x dans $[0,1]$, si $x - x^2 \in \mathbb{N}$ alors $x \in \{0,1\}$. On rédige ainsi :

✓ Soit $x \in [0,1]$. On suppose que $x - x^2 \in \mathbb{N}$. Montrons que $x \in \{0,1\}$.
On pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = t - t^2$. C'est une fonction polynomiale du second degré qui atteint son maximum en $t = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t - t^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Donc, comme $x - x^2 \in \mathbb{N}$, le seul entier naturel inférieur à $1/4$ étant 0, on a :

$$x - x^2 = 0.$$

Or les solutions de cette équation sont 0 et 1. Donc on a bien :

$$x \in \{0,1\}.$$

2 L'équivalence

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

A `est équivalente à` B.

dans la plupart des cas, on rédige une double implication :

✓ `Montrons que` A `est équivalente à` B `par double implication.`
$(\Rightarrow)$ `On suppose` A. `Montrons que` B.
$\vdots$
$(\Leftarrow)$ `On suppose` B. `Montrons que` A.
$\vdots$

Exemple : On veut montrer que pour tous x, y réels, $x^2 + y^2 = 0$ est équivalent à $x = y = 0$. On rédige comme suit.

✓ Montrons par double implication que, pour tous x, y réels, $x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$.

($\Leftarrow$) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $x = y = 0$. Montrons que $x^2 + y^2 = 0$.
Il suffit de faire le calcul :

$$x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0.$$

($\Rightarrow$) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $x^2 + y^2 = 0$. Montrons que $x = y = 0$.
On a donc $x^2 = -y^2$. Or $x^2 \geq 0$ et $-y^2 \leq 0$. Donc :

$$0 \leq x^2 \leq 0.$$

On a donc $x^2 = 0$. Puis $x = 0$ (seule racine carrée de 0).
De même, on a $y^2 = 0$ et donc $y = 0$.

Remarque :

> Comme on peut le voir, l'ordre de démonstration des deux implications n'a pas d'importance *a priori*. Le tout est de bien penser à faire les deux. Un maigre conseil, surtout en colle, est de toujours commencer par la plus simple : cela permet de montrer que vous savez faire des choses.

3 L'inclusion d'ensembles

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

`L'ensemble` E `est inclus dans l'ensemble` F.

on rédige de la manière suivante :

✓ `Soit` x `dans` E. `Montrons que` x `est dans` F.
⋮

Exemple : On veut montrer que l'ensemble $E = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans l'ensemble des entiers naturels pairs $2\mathbb{N}$. On rédige ainsi :

✓ Soit $x \in E$. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = k(k+1)$. Montrons que $x \in 2\mathbb{N}$.
On peut procéder par disjonction de cas :

- Si k est pair, alors on peut écrire $k = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Donc :

$$x = 2m(k+1) = 2 \times (m(k+1)).$$

  Donc x est bien pair.
- Si k est impair, alors $k+1$ est pair. Donc on peut écrire $k+1 = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Donc :

$$x = k \times 2n = 2 \times kn.$$

  Donc x est bien pair également.

Dans tous les cas, x est pair donc $x \in 2\mathbb{N}$.

4 L'égalité d'ensembles

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

`L'ensemble` E `est égal à l'ensemble` F.

dans la plupart des cas, on rédige une double inclusion :

✓ `Montrons que` $E = F$ `par double inclusion.`
($\subset$) `Soit` x `dans` E. `Montrons que` x `est dans` F.
⋮
($\supset$) `Soit` x `dans` F. `Montrons que` x `est dans` E.
⋮

Exemple : Soient deux ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$ et $B = [1, 5]$. On veut montrer que $A = B$.

✓ Montrons que $A = B$ par double inclusion.

($\subset$) Soit x dans A. Montrons que x est dans B.
Comme $x \in A$, on a :

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

Factorisons le polynôme. On se rend compte que 1 est une racine évidente. Cela permet de trouver :

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

Donc $(x - 1)(x - 5) \leq 0$. On en déduit que $x - 1$ et $x - 5$ sont de signes opposés. Cela amène à deux possibilités :

1. $x - 1 \leq 0$ et $x - 5 \geq 0$ ce qui est équivalent à $x \leq 1$ et $x \geq 5$, **ce qui est impossible**;
2. $x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$ ce qui est équivalent à $x \geq 1$ et $x \leq 5$.

Le premier cas étant impossible, on a :

$$1 \leq x \leq 5.$$

C'est-à-dire encore : $x \in B$.

($\supset$) Soit x dans B. Montrons que x est dans A.
Comme $x \in B$, on a :

$$1 \leq x \leq 5.$$

Donc $x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$. En faisant le produit, on obtient :

$$(x - 1)(x - 5) \leq 0.$$

Or, on a :

$$(x - 1)(x - 5) = x^2 - 6x + 5.$$

Donc :

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

D'où $x \in A$.