DS 1 - Suites et séries

Samedi 10/09/2022 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Exercice 1 - ESCP ECS 2019

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{3}{4}$. Calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script Python qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n donnée en paramètre :

```python
def valeurs(n):
  u = ........
  v = ........
  for k in range(n):
    u = ........
    v = ........
  print(u)
  print(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (c) i. Montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$
   ii. En déduire à l'aide de la question 3a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.
   (d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
   (e) Déterminer l'epxression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

   Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.
5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = t_n$.
   (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable Y.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2 - Ecricome ECS 2017

On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
   (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.
   (c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t,$$
   et :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Calculer u_0 et u_1.
   (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
   (e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   (f) Écrire une fonction `Python` d'en-tête :
```python
def somme(n):
```
   qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.
3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0\right]$ et tout entier naturel n :
$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I - S_n| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   (c) Montrer que :
$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$
   (d) Écrire une fonction `Python` d'en-tête :
```python
def estimation(eps):
```
   qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ϵ et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ϵ près.

Problème 3 - EM Lyon ECS 2007 (extrait)

On considère l'application :
$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I - Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application :

$$A : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.
   (b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$.
   (d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application :

$$B : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est deux fois dérivables sur $]0, +\infty[$, et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de B.
   (c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II - Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

   où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$.
3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.
4. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III - Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer en utilisant le résultat de II.3, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.
3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} & = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} & = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.