Correction DS 1 - Suites et séries

Exercice 1 - ESCP ECS 2019

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{3}{4}$. Calculer u_2 et v_2.

Il suffit de calculer par étapes. On a :

$$\boxed{u_1} = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{1}{2}(0+1) \boxed{= \frac{1}{2}}$$

et :

$$\boxed{v_1} = \frac{1}{2}(u_1 + v_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) \boxed{= \frac{3}{4}}.$$

Continuons :

$$\boxed{u_2} = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \boxed{= \frac{5}{8}}$$

et :

$$\boxed{v_2} = \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}\right) \boxed{= \frac{11}{16}}.$$

2. Compléter le script **Python** qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n donnée en paramètre :

```python
def valeurs(n):
  u = ........
  v = ........
  for k in range(n):
    u = ........
    v = ........
  print(u)
  print(v)
```

```python
def valeurs(n):
  # On commence avec u0 et v0
  u = 0
  v = 1
  # On fait ensuite n iterations
  # Si n=0, alors la boucle ne s'execute pas
  for k in range(n):
    # Pour u, on utilise la formule
    u = (u+v)/2
    # Pour v egalement, mais remarquez
    # que u a deja ete mis a jour avec
    # la valeur u(n+1)
    v = (u+v)/2
  print(u)
  print(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{u_{n+1} - u_n} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} w_n.} \end{aligned}$$

   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Encore une fois, soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{w_{n+1}} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) - u_{n+1} \text{ (formule de récurrence pour } v_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(v_n - \left(\frac{1}{2} w_n + u_n\right)\right) \text{ (formule de la question précédente)} \\ &= \frac{1}{2}(v_n - u_n) - \frac{1}{4} w_n \\ &= \frac{1}{2} w_n - \frac{1}{4} w_n \\ &= \boxed{\frac{1}{4} w_n.} \end{aligned}$$

Donc (w_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

   (c) i. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Comme (w_n) est géométrique, on est à deux doigts d'avoir une expression complète. Calculons rapidement :

$$w_0 = v_0 - u_0 = 1 - 0 = 1.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} w_k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \text{ (somme des termes d'une suite géométriques)} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\
&= \boxed{\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).}
\end{aligned}$$

ii. En déduire à l'aide de la question 3a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

La question 3a) permet de calculer $u_{n+1} - u_n$. L'idée est donc d'écrire u_n à partir de ces différences en utilisant une somme télescopique :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k).$$

On a ainsi pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
\boxed{u_n} &= u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \\
&= 0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} w_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} w_k \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ (formule valide uniquement pour } n \neq 0) \\
&= \boxed{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).}
\end{aligned}$$

iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, on a d'une part $u_n = u_0 = 0$. Et d'autre part :

$$\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0.$$

On a donc bien $u_0 = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right)$. Et donc la formule :

$$u_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

est bien valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.}$$

(e) Déterminer l'epxression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - u_n$. On connaît les expressions de u_n et w_n, on peut donc en déduire celle de v_n. Calculons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\boxed{v_n} &= w_n - u_n \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\
&= \left(1 + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \\
&= \boxed{\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3}.}
\end{aligned}$$

Comme pour (u_n), on en déduit la limite :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{5}{3}\times 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.}$$

4. (a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

Déjà, on peut facilement dire que la seule valeur possible de α est $\frac{2}{3}$ car sinon la suite (t_n) tend vers une valeur non nulle et la série diverge grossièrement. Il reste donc à vérifier que la série converge bien pour $\alpha = \frac{2}{3}$.
Regardons la forme exacte de t_n pour $n \in \mathbb{N}$ lorsque $\alpha = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
t_n &= \frac{9}{8}(\alpha - u_n) \\
&= \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) \\
&= \frac{9}{8}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n.
\end{aligned}$$

(t_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Comme sa raison est entre -1 et 1 strictement, sa série converge.

Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

(b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.

Clairement $t_n > 0$ à la formule précédemment trouvée. Et comme (t_n) est géométrique on peut facilement calculer sa somme :

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} t_n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ &= \boxed{1.}\end{aligned}$$

5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = t_n$.
   (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable Y.

Établissons d'abord la loi de Y. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}([Y=n])} &= \mathbb{P}([X+1=n]) \\ &= \mathbb{P}([X=n-1]) \\ &= t_{n-1} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \boxed{\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n-1}.}\end{aligned}$$

Y suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$.
Note : Si l'énoncé n'était pas entièrement clair, on s'intéresse forcément au cas où $\alpha = \frac{2}{3}$. En effet, il faut que la somme des probabilités fassent 1 et donc que la série des t_n converge (et même converge vers 1).

   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Commençons par l'espérance et la variance de Y. En tant que loi géométrique, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

On a aussi :

$$V(Y) = \frac{1-\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.}$$

La variance n'est pas affectée par l'ajout ou la soustraction d'une constante et donc :

$$\boxed{V(X) = V(Y) = \frac{4}{9}.}$$

Exercice 2 - Ecricome ECS 2017

On définit sur l'intervalle $]0, 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?

On a $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée. En conséquence, f admet une limite en 0 et on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
En conséquence, par continuité de l'exponentielle et composition de limite, on a également :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.

Commençons par l'étude de f. f est dérivable sur $]0,1]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, pour $x \in]0,1]$, on a :

$$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1.$$

On résout sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'inéquation :

$$\begin{array}{rcl} \ln(x)+1 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x) & \geq & -1 \\ \Leftrightarrow x & \geq & \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{array}$$

Donc f est strictement décroissante sur $]0,1/\mathrm{e}[$ puis strictement croissante $]1/e,1[$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$1/e$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0

où on a complété la limite en 0 avec la première question et les valeurs en $1/\mathrm{e}$ et 1 par calcul direct.
On peut compléter le tableau de variation de g en remarquant que $g = \exp \circ f$ et que $\exp$ est strictement croissante. Ainsi les variations de g sont les mêmes que celles de f. On a donc :

x	0		$1/e$		1
$g(x)$	1	$\searrow$	$\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	$\nearrow$	1

(c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.

On a déjà noté que g admet une limite en 0. On peut donc prolonger par continuité g en 0 en une fonction $\tilde{g}$ définie et continue sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre et on a simplement $I = \int_0^1 \tilde{g}(t)\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t,$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

On a vu dans la question précédente que $f : x \mapsto x\ln(x)$ admet une limite en 0. Ainsi on peut prolonger par continuité en 0 la fonction f. De même la fonction $x \mapsto (x\ln(x))^n$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et est donc prolongeable par continuité.
L'intégrale définissant u_n est donc faussement impropre et u_n est ainsi bien définie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

La question est plus difficile. Attention, on n'a pas le droit de dire n'importe quoi. On ne dit surtout pas que la limite de l'intégrale est l'intégrale de la limite. Il faut être plus prudent.
L'idée est de majorer l'intégrale. En effet, on a vu aux questions précédentes que :

$$\forall t \in [0,1],\ -\frac{1}{\mathrm{e}} \leq \tilde{f}(t) \leq 0$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f. On a donc :

$$\forall t \in [0,1],\ |\tilde{f}(t)| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Puis :

$$\forall t \in [0,1],\ |\tilde{f}(t)|^n \leq \frac{1}{\mathrm{e}^n}$$

par croissance de la fonction puissance. Puis, comme $\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$, on a $\frac{1}{\mathrm{e}^n} < 1$. On peut maintenant majorer u_n pour $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \frac{1}{n!}\left|\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 |(t\ln(t))^n| \mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire pour l'intégrale)} \\
&\leq \frac{1}{n!}\int_0^1 1\mathrm{d}t \text{ (croissance de l'intégrale appliquée à l'inégalité précédente)} \\
&\leq \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, (u_n) tend vers 0 également (théorème des gendarmes appliqué à $-\frac{1}{n!} \leq u_n \leq \frac{1}{n!}$).

(c) Calculer u_0 et u_1.

Calculons :

$$\begin{aligned}
\boxed{u_0} &= \frac{1}{0!}\int_0^1 (t\ln(t))^0 \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}t \\
&= \boxed{1.}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1!}\int_0^1 (t\ln(t))^1 \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Là, on a un peu plus de travail. Ce genre d'intégrales se calculent naturellement par intégration par parties. Mais l'intégrale est impropre en 0. Et on ne peut que difficilement travailler avec le prolongement par continuité car l'expression sous forme de produit n'est pas valide en 0 et on en a besoin pour appliquer à l'intégration par parties.
Donc pour le faire proprement, nous allons calculer :

$$\int_\epsilon^1 t\ln(t)\mathrm{d}t$$

avec $\epsilon \in]0,1[$ et on fera tendre ϵ vers 0 à la fin. Calculons donc :

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 \underbrace{t}_{u'(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\mathrm{d}t &= \left[\underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^2}{2}}_{u(t)}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1^2\times\ln(1)}{2} - \frac{\epsilon^2\times\ln(\epsilon)}{2} - \frac{1}{2}\int_\epsilon^1 t\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\epsilon^2\times\ln(\epsilon)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_\epsilon^1 \\ &= -\frac{\epsilon^2\times\ln(\epsilon)}{2} - \frac{1^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{4}\left(1 - 2\ln(\epsilon)\right). \end{aligned}$$

Sans que ce soit une garantie de la justesse de notre réponse, on vérifie les points saillants de ce que l'on trouve :

- La formule est négative pour $\epsilon < 1$ ce qui correspond bien au signe qu'on avait trouver pour f.
- Pour $\epsilon = 1$, on a bien une intégrale nulle.

On prend maintenant la limite quand ϵ tend vers 0. Le terme $\frac{\epsilon^2}{4}$ tend vers 0. Le terme $\frac{\epsilon^2\ln(\epsilon)}{2}$ tend également vers zéro par croissance comparée. On a donc :

$$\boxed{u_1 = \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.}$$

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Avant de continuer, on remarque que l'énoncé nous donne les réponses aux questions précédentes. Pour $n = 0$, la formule donne bien $u_0 = 1$ et $u_1 = -1/4$. C'est bon, on ne s'est pas trompé !

On continue. Le sujet nous parle d'intégrales successives. Il est bon d'essayer au brouillon le calcul de u_2 pour voir ce qu'il se passe :

$$u_2 = \frac{1}{2!}\int_0^1 (t\ln(t))^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2 \mathrm{d}t.$$

Comme pour u_1, on explicite la limite à la borne inférieure pour pouvoir faire les calculs d'intégrations par parties. Calculons donc l'intégrale en commençant par une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2 \mathrm{d}t &= \int_\epsilon^1 \underbrace{t^2}_{u'(t)}\underbrace{(\ln(t))^2}\, v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{(\ln(t))^2}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{2\times\frac{1}{t}\times\ln(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{1^3\ln(1)^2}{3}}_{=\,0} - \underbrace{\frac{\epsilon^3\ln(\epsilon)^2}{3}}_{\longrightarrow\,0} - \frac{2}{3}\int_\epsilon^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le premier terme vaut zéro et donc disparaît simplement. Le second terme est non nul mais il tend vers zéro lorsque ϵ tend vers 0 (c'est une croissance comparée). Dans la limite qui nous intéresse, il disparaît donc. On peut du coup réécrire le résultat dans cette limite. On a :

$$\int_0^1 (t\ln(t))^2 \mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln(t)\mathrm{d}t.$$

On voit que l'intégration par partie a fait baisser la puissance du logarithme mais pas celle du monôme. On commence alors à deviner pourquoi le sujet parle d'intégrations par partie successives : si on en refait une la puissance du logarithme devrait baisser encore une fois. Dans le cas général du calcul de u_n, on devrait pouvoir en faisant n intégrations par partie faire disparaître entièrement le logarithme de l'intégrale et obtenir une intégrale faile à calculer.

Finissons le calcul de u_2 (toujours au brouillon) pour valider notre idée. On reprend notre nouvelle intégrale impropre en faisant apparaître un ϵ à la borne inférieure :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t\ln(t))^2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 (t\ln(t))^2 \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \underbrace{t^2}_{u'(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\left[\underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{\ln(t)}_{v(t)}\right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^3}{3}}_{u(t)}\underbrace{\frac{1}{t}}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\epsilon^3\ln(\epsilon)}{3} - \frac{1}{3}\int_\epsilon^1 t^2\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 t^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3^2}\int_0^1 t^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

L'intégrale que l'on obtient n'a effectivement plus de logarithme et on peut la calculer directement :

$$\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Et donc, on a :

$$\int_0^1 (t\ln(t))^2 = \frac{2}{3^3}.$$

Si on revient à la formule de u_2, on a :

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (t\ln(t))^2 = \frac{1}{3^3}}$$

qui est bien égale à $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ pour $n = 2$.

Bien, il n'y a plus qu'à généraliser et à le rédiger proprement sur notre copie. C'est un peu délicat à bien faire mais voici une proposition qui fonctionne.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$:

$$I_{n,k} = \int_0^1 t^n (\ln t)^k \mathrm{d}t.$$

On reprend le calcul précédent pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}
I_{n,k+1} &= \int_0^1 t^n (\ln t)^{k+1}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \underbrace{t^n}_{u'(t)} \underbrace{(\ln t)^{k+1}}_{v(t)} \mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{u(t)} \underbrace{(\ln t)^{k+1}}_{v(t)} \right]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{u(t)} \underbrace{\frac{k+1}{t}(\ln t)^k}_{v'(t)} \mathrm{d}t \right) \\
&= -\frac{k+1}{n+1}\int_0^1 t^n (lnt)^k \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{I_{n,k+1} = -\frac{k+1}{n+1} I_{n,k}.}$$

On en déduit en appliquant la formule successivement pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{I_{n,k} = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} I_{n,0}.}$$

Or pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n!} I_{n,n}$. Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n!} I_{n,n} = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} I_{n,0} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t.}$$

Or :

$$\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.}$$

(e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Après tous ces calculs, la question est presque facile. *Presque* car il ne faut pas faire de bêtises : on sent qu'on va facilement pouvoir dominer les termes **mais** on ne peut faire des comparaisons que pour les séries à termes positifs. On va donc chercher à montrer que $\sum u_n$ est absolument convergente.
On a :

$$|u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \text{ pour } n \geq 1.$$

Or la série des $\frac{1}{2^{n+1}}$ converge donc la série des u_n converge absolument.

(f) Écrire une fonction Python d'en-tête :

```python
def somme(n):
```

qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.

```python
def somme(n):
  # S represente la somme partielle
  # On met tout de suite u0 dans S puisque le terme
  # est toujours present quel que soit n
  S = 1
  # Attention, range(n) fait bien n iterations
  # mais elles vont de 0 a n-1. Ici pour que k
  # represente bien l'indice de u, on le fait aller de
  # 1 a n, mais comme le dernier terme est exclu, on utilise
  # range(1,n+1) .
  # Notez que si n = 0, alors la boucle ne s'execute pas du tout.
  for k in range(1,n+1):
    # Utiliser une variable intermediaire pour u n'est pas
    # obligatoire, mais augmente la lisibilite
    u = (-1)**k / ((k+1)**(k+1))
    S = S + u
  return S
```

3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

La fonction exponentielle est $\mathcal{C}^\infty$. Pour peu que l'on arrive à borner la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ sur le segment, on pourra appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
Or la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de l'exponentielle est tout simplement l'exponentielle. Il suffit donc de borner l'exponentielle sur $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.
Comme exp est croissante, sur ce segment, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right], \ \exp(x) \leq \exp(0) = 1.$$

Comme exp est positive, on a finalement n étant fixé :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right], \ |\exp^{n+1}(x)| \leq 1.$$

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange qui nous dit que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle J et si $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur J alors pour a et b dans J :

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Appliquons le théorème en prenant $f=\exp$, $a=0$, $b=x\in\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right]$ et $M=1$. On a alors :

$$\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On n'a pas encore la formule attendue. Il faut remarquer que $|x|\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$ et donc effectivement :

$$\boxed{\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.}$$

(b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |I-S_n|\leq\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
|I-S_n| &= \left|\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\int_0^1(t\ln(t))^n\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^1\left(g(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}(t\ln(t))^n\right)\mathrm{d}t\right| \text{ (linéarité de l'intégrale : tout converge)} \\
&\leq \int_0^1\left|g(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}(t\ln(t))^n\right|\mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^1\left|\exp(t\ln(t))-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}(t\ln(t))^n\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}\mathrm{d}t \text{ (croissance de l'intégrale et question précédente)} \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}. \text{ (Intégrale d'une constante)}
\end{aligned}$$

(c) Montrer que :

$$I=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

D'après la question précédente :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |I-S_n|\leq\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

Or $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc S_n tend vers I lorsque n tend vers $+\infty$. Comme les S_n sont les sommes partielles des u_n, cela signifie que la série de terme général u_n converge vers I. Formellement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{(n+1)}}=I.$$

Il suffit alors de réindicer et de sortir un -1 pour obtenir :

$$\boxed{I = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

(d) Écrire une fonction Python d'en-tête :

```python
def estimation(eps):
```

qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ϵ et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ϵ près.

La question n'est pas une simple question de code. Il faut en effet trouver un moyen de majorer l'erreur par ϵ. La réponse se trouve dans la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |I - S_n| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

On a une majoration de l'erreur commise par $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$. Il faut donc calculer S_n avec n tel que $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} \leq \epsilon$.

```python
def estimation(eps):
  # On commence par trouver le n necessaire
  # Pour ca on part de 0 et on incremente n tant que
  # l'estimation de l'erreur donnee par la formule precedente
  # est plus grande que eps
  n = 0
  while 1/(numpy.e**(n+1) * numpy.math.factorial(n+1)) > eps:
    n = n+1
  # Inutile de refaire tout le travail : on utilise la fonction
  # somme pour faire le calcul
  return somme(n)
```

Problème 3 - EM Lyon ECS 2007 (extrait)

On considère l'application :

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I - Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

f est clairement continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle. Il suffit donc de vérifier la continuité en 0 de f.
Pour cela, regardons la limite de f en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Attention, pas de croissance comparée ici (on n'est pas aux bords du domaine de définition de ln mais en plein milieu). Il faut reconnaître ici la limite d'un taux de variation :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Or $f(0) = 1$. Donc on a bien :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).}$$

Donc f est bien continue en 0 et donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. On considère l'application :

$$A : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient. Calculons sa dérivée. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{f'(x)} &= \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{\frac{x}{1-x} - (1-x)\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \boxed{\frac{A(x)}{x^2}.}
\end{aligned}$$

(b) Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

On peut utiliser la formule précédente. On aimerait que $A(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$. Essayons de le démontrer en calculer le DL à l'ordre 2 de $A(x)$ en 0^+. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \\
&= x(1 - x + o_{x\to 0^+}(x)) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2)\right) \\
&= x - x^2 - x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2) \\
&= -\frac{x^2}{2} + o_{x\to 0^+}(x^2).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{A(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.}$$

On peut alors travailler avec les équivalents dans f'. On a :

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{A(x)}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}.}$$

Donc f' admet bien une limite en 0 à droite et cette limite est $-\frac{1}{2}$.

(c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$.

f est donc $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée f' admet une limite en 0. Le théorème de prolongement de la dérivée donne donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée en 0 est :

$$\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

(d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Étudions la fonction A. La fonction A est définie et dérivable sur $[0,+\infty[$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$A'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geq 0$, on en déduit que $A'(x) \leq 0$ (et même strictement négative pour $x > 0$).
Pour compléter le tableau de variation, calculons :

$$\boxed{A(0) = 0.}$$

Calculons aussi la limite en $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x\to+\infty} A(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \\ &= \boxed{-\infty.} \end{aligned}$$

On a donc le tableau :

x	0	$+\infty$
$A'(x)$	0 $-$	
$A(x)$	0 $\searrow$	$-\infty$

On voit donc que A est négative (et même strictement pour $x\ neq 0$).
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
Attention cependant, la formule avec A n'est valide que pour $x \neq 0$, on n'a donc pas la décroissance stricte sur $\mathbb{R}_+$ en entier à ce stade.
Mais on a vu que f' existe en 0 et vaut $-\frac{1}{2}$ et est donc négative. On a donc bien la décroissance sur $\mathbb{R}_+$ en entier.

(e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

C'est une simple croissance comparée :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} = 0.}$$

3. On considère l'application :

$$B : [0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

(a) Montrer que f est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.

Encore une fois, f est deux fois dérivable comme quotient. On peut aussi le voir à partir de la formule avec A de f' qui est valide sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

De plus, en partant de $f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{f''(x)} &= \frac{\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}\right)x^2 - \left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \times 2x}{x^4} \\
&= \frac{-\frac{x^2}{(1+x)^2} - 2\frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} - 2\ln(1+x)}{x^3} \\
&= \boxed{\frac{B(x)}{x^3}}.
\end{aligned}$$

(b) Dresser le tableau de variation de B.

B est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. De plus pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\boxed{B'(x)} &= -\frac{6x+2}{(1+x)^2} + 2\frac{3x^2+2x}{(1+x)^3} + \frac{2}{1+x} \\
&= \frac{-2(3x+1)(1+x) + 2(3x^2+2x) + 2(1+x)^2}{(1+x)^3} \\
&= \frac{-6x^2 - 8x - 2 + 6x^2 + 4x + 2x^2 + 4x + 2}{(1+x)^3} \\
&= \frac{2x^2}{(1+x)^3} \\
&= \boxed{2\frac{x^2}{(1+x)^3}.}
\end{aligned}$$

Ainsi B' est positive et B est croissante.
On calcule rapidement :

$$\boxed{B(0) = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x \to +\infty} B(x) = +\infty.}$$

On a finalement le tableau :

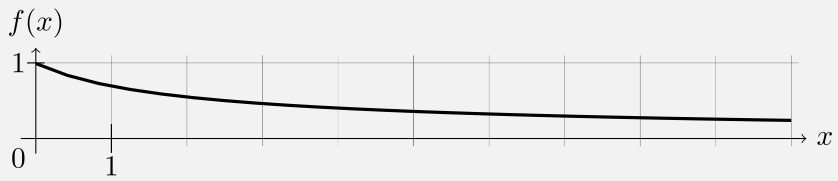
x	0	$+\infty$
$B'(x)$	0 $+$	
$B(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

On déduit de la question précédente que B est positive et donc f'' aussi. Comme f est $\mathcal{C}^2$, on en déduit que sa dérivée est croissante et que f est bien convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Avec l'ordinateur, je triche un peu mais voici le genre de courbe à tracer :



Partie II - Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

On peut reconnaître le développement limité de $\frac{1}{1+t}$ et on pourrait essayer de passer par ce genre de techniques mais c'est vouer à l'échec : ici il y a bien égalité stricte, il n'y a pas de petit o ou d'équivalents. Il faut donc procéder autrement.
En fait, c'est même beaucoup plus simple. Partons du membre de droite pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}} &= \frac{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k (1+t) + (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \text{ (même dénominateur)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{N} ((-1)^k t^k + (-1)^k t^{k+1}) + (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{N} ((-1)^k t^k - (-1)^{k+1} t^{k+1}) + (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \\
&\quad \text{(on réajuste les puissances)} \\
&= \frac{(-1)^0 t^0 - (-1)^{N+1} t^{N+1}) + (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \text{ (somme télescopique)} \\
&= \boxed{\frac{1}{1+t}.}
\end{aligned}$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$.

On intègre l'égalité précédente entre 0 et $x \in [0,1]$. On a donc :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \right) \mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t &= [\ln(1+t)]_0^x \\
&= \ln(1+x) - \ln(1) \\
&= \ln(1+x).
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\int_0^x t^k\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&\text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\int_0^x t^k\mathrm{d}t + J_N(x) \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x + J_N(x) \\
&= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x).
\end{aligned}$$

Et en remettant tout ensemble, on a bien :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x).}$$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}$.

Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
\boxed{|J_N(x)|} &= \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right|\mathrm{d}t \text{ (inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \text{ (car } t \geq 0) \\
&\leq \int_0^x t^{N+1}\mathrm{d}t \text{ (car } \frac{1}{1+t} \leq 1 \text{ et par croissance de l'intégrale)} \\
&\leq \left[\frac{t^{N+2}}{N+2}\right]_0^x \\
&\leq \boxed{\frac{x^{N+2}}{N+2}.}
\end{aligned}$$

4. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Avec la majoration précédente, on a pour $x \in [0,1]$:

$$0 \leq |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2} \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Donc $J_N(x)$ tend vers 0 à l'infini.
Or à x fixé, $\ln(1+x)$ est une constante vis-à-vis de N et est donc égale à sa limite. En écrivant :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$$

on trouve que la limite des sommes est $\ln(1+x)+0$ c'est-à-dire $\ln(1+x)$. Donc la série converge et, avec un changement d'indice, on obtient :

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.}$$

Partie III - Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer en utilisant le résultat de II.3, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1]$:

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|\leq\frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

On commence à connaître la chanson, c'est partie. Pour $x\in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{\left|f(x)-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|} &= \left|\frac{\ln(1+x)}{x}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|\\
&= \left|\frac{\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}+J_N(x)}{x}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|\\
&\quad\text{(formule de } \ln(1+x) \text{ de la partie précédente)}\\
&= \left|\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}+\frac{J_N(x)}{x}-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|\\
&= \left|\frac{J_N(x)}{x}\right|\\
&\leq \frac{x^{N+2}}{x(N+2)}\\
&\leq \boxed{\frac{x^{N+1}}{(N+2)}}.
\end{aligned}$$

Mais, on n'a pas traité le cas $x=0$ pour lequel f a une expression différente. Mais la vérification est facile à faire puisque :

$$\left|f(0)-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k 0^k}{k+1}\right|=\left|f(0)-1-\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k 0^k}{k+1}\right|=|1-1-0|=0.$$

Notez que l'on a utilisé la notation $0^0=1$ qui n'est pas conventionnelle mais qui est en fait adoptée implicitement par le sujet.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Pour la première partie de la question, on pourrait utiliser le critère des séries alternées. Malheureusement, il est hors-programme et il faudrait donc le redémontrer.
Dans ce cas cependant, on n'en a pas besoin : la série est absolument convergente puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente d'après le critère des séries de Riemann.
Pour la seconde partie, la question est technique. Allons-y par étapes. On va chercher à calculer $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ qui existe bien puisque f est continue sur $[0,1]$. On veut se ramener à une série qui ressemble étrangement à l'intégrale de la somme de la question précédente. On va donc la faire apparaître à la

main. Pour N fixé, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^1 x^k \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{1}{k+1} + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(intégration non détaillée)} \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x. \\
&\quad \text{(changement d'indice)}
\end{aligned}$$

Ok. On a presque ce qu'on veut : la somme du début va tendre vers la série recherchée. On a même déjà la convergence de ladite série.
Il faut donc montrer que le morceau qui reste tend vers 0. Et c'est là qu'il faut travailler. On va chercher à majorer ledit morceau :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x \right| &\leq \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2} \mathrm{d}x \\
&\quad \text{(croissance de l'intégrale et formule de la question précédente)} \\
&\leq \frac{1}{(N+2)^2}. \text{ (calcul de l'intégrale non détaillée)}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0$$

Donc on a bien :

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right) \mathrm{d}x = 0.$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}$$

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} \\
&= \underbrace{\frac{1}{(2\times 0+1)^2}}_{\text{terme } p=0 \text{ de la première somme}} + \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{(2p)^2} \right)
\end{aligned}$$

et on reconnaît ici les termes paires et impaires de la somme $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}$. Donc :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}.}$$

La seconde somme fonctionne de manière similaire :

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} \\
&= \frac{1}{(2\times 0+1)^2} + \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{1}{(2p+1)^2} - \frac{1}{(2p)^2} \right) \\
&= \frac{(-1)^{2\times 0+1-1}}{(2\times 0+1)^2} + \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} + \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2} \right) \\
&= \boxed{\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}
\end{aligned}$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

D'après les questions précédentes, on a :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On va donc chercher à calculer la somme de la série.
Cette série apparaît sous forme de sommes partielles dans la question précédente et doit pouvoir donc se calculer en connaissant les limites de :

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.$$

Ces limites ne sont pas évidentes à calculer *a priori*. Mais la question précédente nous donne encore un autre indice : ces quantités sont aussi reliées à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Donc commençons par :

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}\\ &= \frac{\pi^2}{24}.\end{aligned}$$

Pour la seconde somme, remarquons que :

$$\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}.$$

Comme les deux sommes de droites ont une limite, celle de gauche en a une aussi. On a donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3\pi^2}{24}.$$

On peut finalement revenir à notre série initiale :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \lim_{N\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{4p^2}\\ &= \frac{3\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{24}\\ &= \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$$