Rédaction 4 - Existence, Unicité

Maintenant que nous avons les bases pour manipuler les objets mathématiques que nous allons croiser cette année, penchons-nous sur quelques rédactions typiques. Il est de plus utile de les connaître car ces rédactions usuelles permettent de structurer correctement la pensée.

1 Montrer une propriété universelle

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

`Pour tout` x `dans` E`, on a` $\mathcal{P}(x)$

on rédige de la manière suivante :

✓ `Soit` x `dans` E`. Montrons que` $\mathcal{P}(x)$ `est vraie :`
⋮

Exemple : On veut montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

On procède ainsi :

✓ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
On sait que $(x-1)^2 \geq 0$. Donc :

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0.$$

Puis :

$$x^2 + 1 \geq 2x.$$

Et enfin, comme $x^2 + 1 > 0$:

$$1 \geq \frac{2x}{x^2+1}.$$

On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

2 Montrer une existence

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

$$\texttt{Il existe } x \texttt{ dans } \mathrm{E} \texttt{ tel que } \mathcal{P}(x)$$

on rédige de la manière suivante :

✓ `Posons` $x = \ldots$. `Vérifions que` x `est bien dans` E :

⋮

`Montrons que` $\mathcal{P}(x)$ `est effectivement vraie :`

⋮

Remarque :

La difficulté des démonstrations d'existence est souvent d'avoir la bonne intuition pour la formule de x à utiliser au départ. Il n'y a malheureusement pas de méthode universelle. On verra tout de même une méthode applicable avec une certaine généralité : l'analyse-synthèse.

Exemple : On veut montrer que, pour tout x et pour tout y, entiers naturels, il existe z entier naturel tel que $\sqrt{z} > x + y$. On précède ainsi :

✓ Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Posons $z = (x+y+1)^2$. z est bien un entier naturel car obtenu par sommes et produits d'entiers naturels.
Vérifions que $\sqrt{z} > x + y$. En effet :

$$\sqrt{z} = \sqrt{(x+y+1)^2}.$$

Puis, comme $(x+y+1)$ est positif :

$$\sqrt{z} = x + y + 1.$$

Et on a bien : $x + y + 1 > x + y$.

3 Montrer une unicité

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme :

`Il y a au plus un` x `dans` E `tel que` $\mathcal{P}(x)$

on rédige de la manière suivante :

✓ `Soient` x `et` y `dans` E `tels que` $\mathcal{P}(x)$ `et` $\mathcal{P}(y)$`. Montrons que` $x = y$`.`
$\vdots$

Remarque :

> Attention, l'unicité n'implique pas l'existence. Remarquez la locution « il y a **au plus un** x » dans ce qui précède. La rédaction précédente ne montre pas l'existence d'un élément, seulement que **s'il existe**, alors il est unique.
> En fait, lorsque l'on écrit « Soient x et y dans E tels que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{P}(y)$ », on suppose implicitement que de tels éléments existent. S'ils n'existent pas, alors tout le reste n'a aucun sens. Donc s'ils existent, il y en a en fait un seul, mais s'ils n'existent pas, il n'y en a aucun.

Exemple : Montrons qu'un nombre réel possède au plus une racine (carrée) strictement[1] positive. C'est-à-dire, si $x \in \mathbb{R}$, alors il y a au plus un nombre réel positif ω tel que $\omega^2 = x$. On procède ainsi :

✓ Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient ω et ω' dans $\mathbb{R}_+^\star$ tels que $\omega^2 = x$ et $\omega'^2 = x$. Montrons que $\omega = \omega'$.
On a :
$$\omega^2 = x = \omega'^2.$$
En réorganisant, on obtient :
$$\omega^2 - \omega'^2 = 0.$$
On factorise :
$$(\omega - \omega')(\omega + \omega') = 0.$$
Un produit est nul seulement si l'un des deux facteurs est nul au moins. Donc on a :
$$\omega - \omega' = 0 \text{ ou } \omega + \omega' = 0.$$
Or, si $\omega + \omega' = 0$, on a : $\omega = -\omega'$. Et dans ce cas, ω et ω' sont de signes opposés. Mais c'est impossible car ω et ω' sont tous deux strictement positifs.
Donc $\omega - \omega' = 0$. C'est-à-dire :
$$\omega = \omega'.$$

Remarque :

> **Attention !** L'existence n'est pas montrée. D'ailleurs, un tel ω n'existe pas pour $x < 0$ (et même pour $x = 0$ à cause de la condition de stricte positivité).

1. Cela évite une difficulté technique qui n'est pas l'objet de cet exemple.