

DM 1 - PROBABILITÉS DISCRÈTES

Pour le mardi 03/10/2023

Exercice 1 - EDHEC ECS 2011

Dans tout l'exercice, on suppose que les bibliothèques *Python* sont importées comme suit :

```
1 import numpy.random as rd
```

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n , chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas les mêmes numéros, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout entier k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

- (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
(b) Donner sans calcul l'espérance de T_1 .
- (a) Compléter la fonction *Python* suivante pour qu'elle réalise un tirage de 2 boules dans l'urne :

```
1 def tirage(n):
    a = rd.randint(2*n)
    b = a
    while ...:
5     b = rd.randint(2*n)
    return a,b
```

Comment sont représentées les boules dans ce code *Python* ?

- (b) Compléter la fonction *Python* suivante afin qu'elle renvoie une réalisation de la variable T_1 .

```
1 def T1(n):
    n1 = 0
    n2 = 1
    t = 0
5     while ...:
        a,b = tirage(n)
        n1 = a % n
        n2 = b % n
        t = t + 1
10    return t
```

- (c) **Bonus** : le sujet d'origine contenait l'unique question suivante.

Compléter la fonction *Python* suivante afin qu'elle renvoie une réalisation de la variable T_1 .

```
1 def T1(n):
    t = 0
    a = 0
    b = 1
5     while ...:
        a = rd.randint(n) + 1
```

```

b = rd.randint(n) + 1
t = t+1
return t

```

Quelle était la réponse attendue? Expliquer l'erreur du sujet.

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $\llbracket 2, n \rrbracket$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
 - (a) Que représente la variable X_i ?
 - (b) Déterminer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de X_i , ainsi que son espérance.
 - (c) En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a $E(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.
 - (a) Calculer $P(S_n = 0)$.
 - (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$.
 - (c) Montrer que $P(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$.
5. Expliquer ce que fait la fonction Python suivante :

```

1 def fonction_mystere(n):
    m = n
    z = 0
    for i in range(1,n+1):
5     a,b = tirage(m)
        n1 = a % n
        n2 = b % n
        if a == b:
            z = z + 1
10        m = m - 1
    return z

```