DS 1 - Suites et séries

Samedi 23/09/2023 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 - EDHEC ECS 2017

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :
$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. (a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de **`f(x,n)`** où **`x`** et **`n`** sont donnés par l'utilisateur.

```
def f(x,n):
  y = ...
  for i in range(...):
    y = y + ...
  return y
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant le code suivant où a fonction est toujours nommée `f` :

```
def f(x,n):
  if x == 1:
    y = ...
  else:
    y = ...
  return y
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ d'inconnue x élément de $[0,1]$ possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ pour établir que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère la fonction supplémentaire suivante qui prend en paramètre un entier n non nul :

```python
def g(n):
  x = 0
  while f(x,n) < 1:
    x = x + 0.001
  return x
```

Quel est le lien entre le résultat renvoyé et α_n ?

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2016

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.
On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k$.
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $\displaystyle\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$
6. Démontrer alors que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2008

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. **Étude de la dérivabilité de F.**
   (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$,
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$
   (b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$,
   $$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant K|h|.$$
   (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.
4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que : $\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x)$.
   (d) Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème 4 - EDHEC ECS 2017 (adapté)

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ ka base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ e_k = X^k$.

Partie I - Étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Calculer $\varphi(e_0)$ et l'exprimer en fonction de e_0.
   (b) Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(e_i) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   (c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire. Vérifier que les éléments diagonaux de la matrice sont tous égaux.
   (d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
   (b) Déterminer φ^{-1} puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$.
   (c) On donne la fonction **Python** suivante :

```
1 def mat_phi(n):
    M = np.eye(n+1)
    for k in range(n):
      M[k,k+1] = -k
5   A = ...
    return A
```

   Compléter la ligne 5 pour que la matrice A de φ dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ soit renvoyée.

Partie II - Étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.
On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

5. (a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   (b) Établir que, pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}$.

6. **Informatique**

   (a) On admet que, si `u` est un tableau `numpy`, la commande `np.prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u` et la commande `np.cumprod(u)` renvoie un tableau de même format que `u` dont le $k^{\text{ème}}$ élément est le produit des k premiers éléments de `u`.
   Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b pour compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle calcule et renvoie la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, les valeurs de x et de k étant passées en paramètres.

```python
def val_int(x,k):
  p = np.prod(np.arange(1,k+1))
  u = ... / ...
  s = p * ... * np.exp(-x)
  return s
```

   (b) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que : $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}(u+x)^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$.
   En déduire l'expression manquante de la fonction `Python` suivante afin qu'elle permette de calculer de de renvoyer une valeur approchée de $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ grâce à la méthode de Monte-Carlo.

```python
def int_mc(x,k):
  z = rd.exponential(1,100000)
  s = np.exp(-x)*np.mean(...)
  return s
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

7. (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F, F' et P.
   (c) Montrer que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul. On suppose qu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi(P) = \lambda P$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la question 7b pour établir que : $P' = \frac{\lambda-1}{\lambda}P$.
   (b) En déduire, en considérant les degrés, que nécessairement $\lambda = 1$.
   (c) On suppose désormais $\lambda \in \mathbb{R}$ (on relâche l'hypothèse $\lambda \neq 0$). Montrer que nécessairement $\lambda = 1$.

9. (a) Montrer que les endomorphismes φ et ψ sont égaux.
   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors :

$$\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0.$$