CORRECTION DS 1 - SUITES ET SÉRIES

Exercice 1 - EDHEC ECS 2017

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :
$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. (a) Il suffit de faire :

```python
def f(x,n):
  y = 0
  for i in range(...):
    y = y + x**i
  return y
```

(b) Pour $x \neq 1$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométriques de raison $x \neq 1$. On a donc :

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.}$$

Pour $x = 1$, on a simplement : $\boxed{f_n(x) = n.}$ On peut donc écrire :

```python
def f(x,n):
  if x == 1:
    y = n
  else:
    y = x*(1-x**n)/(1-x)
  return y
```

2. f_n est une fonction polynomiale donc dérivable. On a :

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}.$$

Pour $x \in [0,1]$, on a donc $f_n'(x) > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n$. Comme f est dérivable, f est bien continue. Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1.}$

3. (a) On a :

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k}_{=f_n(\alpha_n)=1} + \underbrace{\alpha_n^{n+1}}_{\geqslant 0} \geqslant 1.}$$

Ainsi, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

Or f_{n+1} est une bijection croissante. La bijection réciproque est donc également croissante et on en déduite :

$$\boxed{\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}}$$

c'est-à-dire (α_n) est une suite décroissante.

(b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{elle converge (limite monotone).}}$

4. (a) On résout :

$$\begin{aligned} f_2(\alpha_2) &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha_2+\alpha_2^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha_2^2+\alpha_2-1 &= 0. \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de discriminant : $\Delta = 1^2-4\times 1\times(-1)=5$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

La première solution est strictement négative. Donc nécessairement (puisque $\alpha_2 \in [0,1]$ existe et est unique) :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$$

De plus, comme $4<5<9$, on a $2<\sqrt{5}<3$ puis $1/2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$.

$\boxed{\text{Donc on a bien } 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 \text{ (et même strictement).}}$

(b) Comme (α_n) est décroissante, on a : $foralln \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant \alpha_2$. Donc, par croissante de la fonction puissance, $\alpha_n^{n+1} \leqslant \alpha_2^{n+1}$. Comme tous les termes sont positifs, on peut écrire :

$$0 \leqslant \alpha_n^{n+1} \leqslant \underbrace{\overset{n+1}{\underbrace{\alpha_2}_{<1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

Donc, par encadrement : $\boxed{\alpha_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

(c) On a $f_n(\alpha_n)=1$ donc :

$$\alpha_n \times \frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n} = 1$$

puisque $\alpha_n \neq 1$ dès $n=2$. Par équivalence, on obtient :

$$\frac{\alpha_n(1-\alpha_n^n)}{1-\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1-\alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{1-\alpha_n^{n+1}}{2}.$$

Or $\alpha_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$$

5. C'est un programme de recherche de solutions par balayage : on calcule successivement $f_n(0)$, $f_n(0,001)$, $f_n(0,002)$, etc jusqu'à obtenir une valeur supérieur à 1. Comme f_n est continue et comme $f_n(x)=1$ a une unique solution, la valeur précédent l'arrêt et la valeur de x à l'arrêt forment un encadrement (à $0,001$ près) de la solution.

Le résultat renvoyé est donc nombre comensurable à $0,001$ supérieur ou égal à α_n et c'est donc une approximation de α_n à $0,001$ près.

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2016

1. (a) On a :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et donc, on a bien :

$$\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

(c) Par comparaison de séries à termes de signe constant au voisinage de $+\infty$ (ici négatif), puisque la série $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ converge (critère de Riemann), $\boxed{\text{la série } \sum(w_{n+1} - w_n) \text{ converge également.}}$
De plus, pour $N \geqslant 2$, on a :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}(w_{n+1} - w_n)}_{\text{converge quand } N\to+\infty} = w_N - w_1.$$

puisque c'est une somme télescopique. Donc $\boxed{\text{la suite } (w_N)_N \text{ converge également}}$ (vers $\sum_{n=1}^{+\infty}(w_{n+1} - w_n) + w_1$). On peut noter γ sa limite réelle.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ est dérivable (comme quotient). On a de plus pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2} = \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{>0}(1 - \ln t).$$

Donc les variations de φ sont données par le signe de $1 - \ln t$.
De plus, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

où la seconde limite est obtenue par croissance comparée.
On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		e		$+\infty$
$1-\ln t$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. (a) Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :

- **Déroissance de (S_{2n}) :** Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} \\ &= (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé la décroissance de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $]\mathrm{e}, +\infty[$. Donc $\boxed{(S_{2n}) \text{ est décroissante.}}$

- **Croissance de (S_{2n+1}) :** Soit $n \geqslant 2$. De manière similaire, on a :

$$S_{2(n+1)+1)} - S_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \geqslant 0$$

Donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$

- **Limite de $S_{2n} - S_{2n+1}$:** On a :

$$\boxed{S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

$\boxed{\text{Les suites sont donc bien adjacentes.}}$

(b) Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles ont une limite réelle commune. Comme, de plus, il s'agit des termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles, la suite des sommes partielles a, à son tour, cette même limite.

$\boxed{\text{Ainsi la série } \sum u_n \text{ converge.}}$

$\boxed{\text{La convergence n'est pas absolue}}$ puisque pour tout $n \geqslant 3$:

$$\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente.

4. (a) La fonction φ est décroissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$. Donc pour $n \geqslant 3$ et $t \in [n, n+1]$, on a $\varphi(t) \geqslant \varphi(n+1)$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) \mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_n^{n+1} \varphi(n+1) \mathrm{d}t}_{=\varphi(n+1)}$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t.}$$

(b) Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} + \frac{(\ln(n))^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\ &\leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\ &\leqslant \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_n^{n+1} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ est décroissante (pour } n \geqslant 3).}$

Il faut ensuite minorer v_n (pour obtenir une convergence monotone). Pour cela, il faut compléter l'encadrement de la question précédente :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

ce qui se fait de la même manière. Pour $n \geqslant 3$, on peut alors affirmer :

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(3))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2} + \underbrace{\frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2}{2}}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est minorée.}}$

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$

5. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \right)}_{\text{termes paires et impaires séparés}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} \boxed{= S_{2n}.}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n+\frac{(\ln(n))^2}{2}-v_{2n}-\frac{(\ln(2n))^2}{2}\\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}+\frac{(\ln(n))^2-(\ln(2)-\ln(n))^2}{2}\\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}+\frac{(\ln(n))^2-\ln(2)^2+\ln(n)^2-2\ln(2)\ln(n)}{2}\\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}-\frac{(\ln(2))^2}{2}-\ln(2)\ln(n).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{S_{2n}=\ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}-\frac{(\ln(2))^2}{2}-\ln(2)\ln(n).}$$

6. On peut réécrire l'égalité précédente sous la forme :

$$S_{2n}=\ln(2)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)}_{=w_n}+v_n-v_{2n}-\frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Comme (v_n) converge, on a $v_n-v_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Et comme $w_n\to\gamma$, on a :

$$S_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\gamma\ln(2)-\frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Or, comme (S_n) converge, elle converge vers la même limite que (S_{2n}) qui en est une suite extraite. Donc, on a bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}=\gamma\ln(2)-\frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2008

1. (a) Soit $x\geqslant 0$. Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on a :

$$f_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{n+x-n}{n(n+x)}=\frac{x}{n(n-x)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^2}$ converge (critère de Riemann). Donc par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ converge également.}}$

(b) On a :

$$\boxed{F(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+0}\right)=0.}$$

On a également :

$$F(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Passons aux sommes partielles. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}0} .$$

Donc :

$$\boxed{F(1) = 1.}$$

2. Commençons par remarquer que f_n est effectivement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ dès lors que $n \geqslant 1$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Encore une fois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann. Donc, par équivalence de termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n'(x) \text{ converge.}}$

3. (a) φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$. Cette dérivée seconde est décroissante, donc sur l'intervalle $[n, +\infty[$, on peut la majorer par sa valeur en n.
Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne à l'ordre 2, au voisinage de $x_0 \in [n, +\infty[$:

$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\varphi''(n) \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \times \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \\
&= \left|-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + ((n+x+h) - (n+x))\varphi'(n+x)\right| \\
&\underset{\text{signe inversé}}{=} \left|\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - ((n+x+h) - (n+x))\varphi'(n+x)\right| \\
&\leqslant \frac{h^2}{n^3}.
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3}$ converge (critère de Riemann). Donc, par comparaison,
$\boxed{\text{la série de terme général } |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \text{ converge absolument donc converge.}}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| &= \left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h}\left(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)\right)\right| \\
&\ \textit{(somme de séries convergentes)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \\
&\ \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3} \\
&\leqslant |h| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}_{\text{constante}} .
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a bien :

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.}$$

(d) Ainsi, on a :

$$0 \leqslant \left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x) \right| \leqslant \underbrace{K|h|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

Donc, par encadrement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$$

c'est-à-dire la limite existe et est réelle, $\boxed{F \text{ est donc dérivable en } x}$ et on a :

$$\boxed{F'(x) = G(x).}$$

4. (a) $x \in \mathbb{R}_+$ est fixé. On étudie alors la fonction $\psi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0.$$

Donc ψ est décroissante et donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \psi(k+1) \leqslant \psi(t) \leqslant \psi(k)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\forall t \in [k, k+1],\ f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x)$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$\boxed{\underbrace{\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\mathrm{d}t}_{=f_{k+1}(x)} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f_k(x)\mathrm{d}t}_{=f_k(x)}.}$$

(b) On somme l'inégalité de droite précédente, avec $n \geqslant 2$:

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t}_{=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x).}$$

On obtient bien la première inégalité.
Pour l'autre inégalité, on procède de manière similaire :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x)}_{=\sum_{k'=2}^{n} f_{k'}(x)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t}_{=\int_1^{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t}.$$

On rajoute alors le premier terme manquant de la somme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \underbrace{f_1(x)}_{=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

On a bien finalement :

$$\boxed{\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

(c) Le but est de passer à la limite $n \to +\infty$. Calculons d'abord la forme des termes de gauche et droite.

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln(n) - \ln(n+x) - \ln(1) + \ln(1+x) = \ln \frac{n(1+x)}{n+x}.$$

On a $\frac{n(1+x)}{n+x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+x$ donc :

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x).$$

Par passage à la limite, on en déduit l'encadrement :

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)}_{=F(x)} \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

(d) Puisqu'on étudie la limite $x \to +\infty$, on peut diviser par $\ln(1+x)$. On obtient pour $x > 0$:

$$1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \underbrace{\frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} +1.$$

Donc par encadrement, $\frac{F(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Problème 4 - EDHEC ECS 2017 (adapté)

Partie I - Étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a également $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$ (puisque la dérivation fait perdre des degrés). Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{on a bien } \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$
   Soient maintenant $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^{n} (P + \lambda Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \lambda \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).$$

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

   Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) On a :

$$\varphi(e_0) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} 1^{(k)} = 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n \text{ fois}} \boxed{= e_0.}$$

La question a été modifiée pour s'adapter au début d'année. On verra plus tard que e_0 est un « vecteur propre » de φ pour la « valeur propre » 1

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = \sum_{k=0}^{n} (e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)}.$$

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(e_j)^{(k)} < \deg e_j$ (car $e_j \neq 0$). De plus :

$$\deg \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)} \leqslant \max_{k\in[\![1,n]\!]} ((e_j)^{(k)}).$$

Et comme $\deg e_j = j$, on obtient $\deg(\varphi(e_j) - e_j) < j$ et comme le dégré est entier :

$$\boxed{\deg(\varphi(e_j) - e_j) \leqslant j - 1.}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\varphi(e_i) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$

(c) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, comme $\varphi(e_j) - e_j \in\in \mathbb{R}_{j-1}[X]$, il se décompose sur $(1, X, \ldots, X^{j-1})$ c'est-à-dire sur $(e_0, e_1, \ldots, e_{j-1})$.

On a donc :

$$\varphi(e_j) = e_j + \sum_{k=0}^{j-1} \mu_k e_k$$

où les μ_k sont des coefficients réels. En particulier, dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, les colonnes 1 à n de la matrice de φ ont des coefficients non nuls uniquement sur les lignes 0 à j. Avec $\varphi(e_0) = e_0$, cela donne une matrice de la forme :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Les coefficients diagonaux se lisent en reprenant le coefficient de vant e_j dans $e_j + \sum_{k=0}^{j-1} \mu_k e_k$.

C'est donc bien $\boxed{\text{une matrice triangulaire supérieur avec des 1 uniquement sur la diagonale.}}$

Encore une fois, la question a été modifiée pour s'adapter au début d'année. On verra plus tard que l'on vient de s'intéresser au « spectre » de φ.

(d) La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est une matrice triangulaire supérieur sans coefficient nul sur la diagonale. Elle est donc inversible. En conséquence, φ est bijectif.

φ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{c'est donc bien un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\varphi(P - P') \underset{\text{linéarité}}{=} \varphi(P) - \varphi(P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} (P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)} = P - P^{(n+1)}.$$

Comme $\deg P \leqslant n$, on a nécessairement $P^{(n+1)} = 0$. Et donc :

$$\boxed{\varphi(P - P') = P.}$$

(b) On pose $\psi : P \mapsto P - P'$. On a alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc $\psi = \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $\boxed{\varphi^{-1}(P) = P - P'.}$

Habituellement, il faut montrer également que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Mais cela est nécessaire pour montrer que φ est bijective.

Ici, on sait déjà que φ^{-1} existe. On peut donc composer à gauche $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1}$ qui donne $\psi = \varphi^{-1}$.

On a $\varphi^{-1}(e_0) = e_0 - e_0' = e_0$. Puis, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\varphi^{-1}(e_j) = e_j - e_j' = X^j - jX^{j-1} = e_j - je_{j-1}.$$

Et donc la matrice de φ^{-1} est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) Le code donné construit la matrice de φ^{-1}. Pour obtenir la matrice de φ, il suffit de calculer l'inverse :

```
def mat_phi(n):
  M = np.eye(n+1)
  for k in range(n):
    M[k,k+1] = -k
  A = al.inv(M)
  return A
```

Partie II - Étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est généralisé uniquement en $+\infty$ (si $x \in \mathbb{R}$).
Or $t^k\mathrm{e}^{-t} = \underbrace{t^k\mathrm{e}^{-t/2}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{}0} \mathrm{e}^{-t/2} = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t/2})$. Or l'intégrale $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t$ converge donc, par négligeabilité, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge également}}$ (et même absolument).

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Ainsi :

$$\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \int_x^{+\infty} a_k t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

$\boxed{\text{converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.}}$

5. (a) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_x^A \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_x^A = -\underbrace{\mathrm{e}^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc $\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge}}$ et :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}.}$$

(b) Montrons le résultat demandé par récurrence.

- **Initialisation :** pour $k = 0$, on a d'une part :

$$\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}.$$

D'autre part, on a :

$$k!\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} = 0!\sum_{i=0}^0 \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc on a bien :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^0\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 0!\sum_{i=0}^0 \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}.}$$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k!\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}$. Montrons que la relation tient pour $k+1$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_x^A \underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{=v'(t)}\mathrm{d}t &\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)}\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{=v(t)}\right]_x^A - \int_x^A \underbrace{(k+1)t^k}_{=u'(t)}\underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{=v(t)}\mathrm{d}t \\ &= -\underbrace{A^{k+1}\mathrm{e}^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + x^{k+1}\mathrm{e}^{-x} + (k+1)\underbrace{\int_x^A t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

Donc, en passant à la limite $A \to +\infty$, puisque toutes les intégrales convergent, on a :

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} t^{k+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t &= x^{k+1}\mathrm{e}^{-x} + (k+1)\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{HR}}{=} (k+1)!\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^{-x} + (k+1)k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} \\
&= \boxed{(k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}.}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est bien héréditaire.

Par récurrence, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\boxed{\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}.}$

6. (a) On va évidement utiliser la formule que l'on vient de démontrer. On peut voir que `p` contient $k!$. Donc, le terme manquant de la dernière doit être la somme $\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}$.

On peut procéder ainsi : dans la variable `u`, on construit le tableau qui contient les termes $\frac{x^i}{i!}$ et dans la dernière ligne, on en fait la somme.

Pour faire tenir ça dans la place prévue, il faut bien maîtriser `Python`. Il faut se rappeler que les opérations usuelles se font terme à terme sur les tableaux. On peut donc écrire :

```
def val_int(x,k):
  p = np.prod(np.arange(1,k+1))
  u = (x**np.arange(1,k+1)) / np.cumprod(np.arange(1,k+1))
  s = p * (1 + np.sum(u)) * np.exp(-x)
  return s
```

On a séparé le terme $i = 0$ qui pose des problèmes de division par zéro s'il est mal géré.

(b) Posons $t = u + x$. La changement est $\mathcal{C}^1$ et bijectif. Avec les bonnes limites, on a donc que les intégrales :

$$\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}(u+x)^k\mathrm{e}^{-(u+x)}\mathrm{d}u$$

ont même nature et sont égales en cas de convergence. Comme la première converge, on a :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}(u+x)^k\mathrm{e}^{-(u+x)}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}(u+x)^k\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.}$$

Ainsi, à un facteur e^{-x} près, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ peut être considéré comme une espérance $E((X+x)^k$ où X suit une loi exponentielle de paramètre 1. On peut donc utiliser le code suivant :

```
def int_mc(x,k):
  z = rd.exponential(1,100000)
  s = np.exp(-x)*np.mean((z + x)**k)
  return s
```

7. (a) *A priori*, ψ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Commençons par noter $\boxed{\text{qu'elle est linéaire}}$ par linéarité de l'évaluation et par linéarité de l'intégrale.

Montrons que ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons $P = a_0X^0 + \cdots +_n X^n$. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\frac{a_k x^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une formule polynomiale et le degré le plus élevé est atteint pour $i = n$ donc $\deg \psi(P) \leqslant n$. D'où $\boxed{\psi(P) = F \in \mathbb{R}_n[X].}$

Donc $\boxed{\psi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

(b) On a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{= \text{ constante}} - \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \right)$$

Or, d'après le théorème fondamentale de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ puisque $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue.

Donc F est le produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ et $\boxed{\text{est donc } \mathcal{C}^1.}$ De plus :

$$\boxed{F'(x) = \mathrm{e}^x \left(\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \right) - \mathrm{e}^x P(x)\mathrm{e}^{-x} = F(x) - P(x).}$$

(c) Montrons que ψ est injective. Soit $P \in \mathrm{Ker}\psi$. Montrons que $P = 0$.

On a $\psi(P) = 0$, c'est-à-dire $F = 0$. Or, d'après la question précédente :

$$\underbrace{F'}_{=0} = \underbrace{F}_{=0} - P.$$

Donc $\boxed{P = 0.}$ ψ est bien injective. Comme c'est un endormorphisme en dimension finie, par égalité des dimensions, ψ est également surjective et donc bijective.

Donc $\boxed{\psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

8. *Ces questions ont été modifiées. Il s'agit encore de questions sur les valeurs propres et le spectre.*

(a) On a $\psi(P) = \lambda P$. Or $\psi(P) = F$ vérifie :

$$F' = F - P.$$

Donc :

$$\lambda P' = \lambda P - P$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P}$$

puisque $\lambda \neq 0$.

(b) Comme $P \neq 0$, on a $\deg P \geqslant 0$. Cela implique en particulier que $\deg P' < \deg P$ (dit autrement dériver fait toujours perdre un degré sauf pour le polynôme nul).

Donc $\deg \frac{\lambda-1}{\lambda} P < \deg P$. Cela n'est possible que si $\lambda = 1$ (car sinon les degrés sont égaux).

Donc nécessairement $\boxed{\lambda = 1.}$

(c) Il suffit de montrer que $\lambda = 0$ est impossible. Or si $\lambda = 0$, on a $\psi(P) = 0P = 0$. Donc $P \in \mathrm{Ker}\psi$ avec $P \neq 0$. Mais c'est impossible puisque ψ est inversible (donc injectif).

Donc nécessairement $\boxed{\lambda = 1.}$

9. (a) **Méthode 1 :** Il suffit de vérifier que φ et ψ coïncident sur une base. Par exemple, avec la base canonique $(e_0, \dots, e_n)$, on a :

$$\psi(e_k)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} \boxed{= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}.}$$

Pour φ, calculons :

$$\begin{aligned}\varphi(e_k)(x) &= \sum_{i=0}^{n}(e_k)^{(i)}(x)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{(k-i)!}x^{k-i}\\ &= k!\sum_{i'=0}^{k}\frac{x^{i'}}{i'!}\boxed{=\psi(e_k)(x).}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\psi=\varphi.}$

Méthode 2 : On a vu en posant $F=\psi(P)$ que $F'=F-P$. Donc $P=F-F'$. Ainsi $F\mapsto F-F'$ est la bijection réciproque de ψ. Or on reconnaît φ^{-1}. Donc ψ et φ ont la même bijection réciproque, $\boxed{\text{ce sont les mêmes endomorphismes.}}$

(b) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\geqslant a,\ P(x)\geqslant 0$.
Appliquons l'égalité obtenue $\psi(P)=\varphi(P)$. Pour $x\geqslant a$, on a :

$$\underbrace{\mathrm{e}^x\int_x^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{\geqslant 0}=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(x)$$

où la positivité du terme de gauche est obtenue par positivité des facteurs et positivité de l'intégrale. On a bien :

$$\boxed{\forall x\geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n}P^{(i)}(x)\geqslant 0.}$$