DS 1 - EDHEC 2017 (Cubes)

Samedi 23/09/2023 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. (a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)` où `x` et `n` sont donnés par l'utilisateur.

```python
def f(x,n):
  y = ...
  for i in range(...):
    y = y + ...
  return y
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant le code suivant où a fonction est toujours nommée `f` :

```python
def f(x,n):
  if x == 1:
    y = ...
  else:
    y = ...
  return y
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ d'inconnue x élément de $[0,1]$ possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ pour établir que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère la fonction supplémentaire suivante qui prend en paramètre un entier n non nul :

```python
def g(n):
  x = 0
  while f(x,n) < 1:
    x = x + 0.001
  return x
```

Quel est le lien entre le résultat renvoyé et α_n ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égale à 2, et on considère n variables aléatoires, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
   (a) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$ puis montrer que M_n est une variable à densité.
   (b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n.
   (c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
   (d) Donner, pour tout $\epsilon > 0$, un majorant, ne dépendant que de n et ϵ, de $P\big((M_n - 1)^2 \geqslant \epsilon^2\big)$.
   (e) Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 1| \geqslant \epsilon) = 0$. Que signifie ce résultat ?
2. On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.
   (a) On rappelle que `rd.random(n)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0,1])$. Compléter la déclaration de fonction `Python` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```python
def f(n):
  x = rd.random(n)
  y = ...
  return y
```

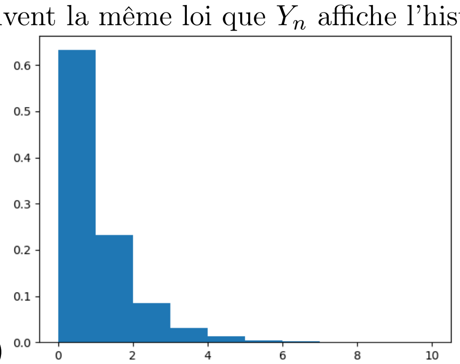
   (b) Voici deux fonctions (celle de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

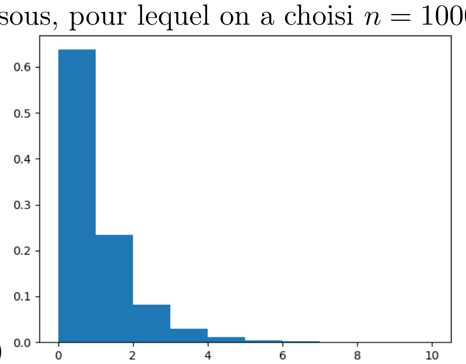
```python
def fonction1():
  e = rd.exponential(1,10000)
  s = np.linspace(0,10,11)
  plt.hist(e,s,density=True)
  plt.show()
```

```python
def fonction2(n):
  y = np.zeros(10000)
  for k in range(10000):
    y[k] = f(n)
  s = np.linspace(0,10,11)
  plt.hist(y,s,density=True)
  plt.show()
```

Chacune de ces fonctions simule 10000 variables aléatoires indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1],]1,2],]2,3], \ldots,]0,10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de classe).

La fonction `fonction1` dans laquelle les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1 affiche l'histogramme (1) ci-dessous alors que la fonction `fonction2` dans laquelle les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n affiche l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.

(1) 

(2) 

Quelle conjecture peut-on émettre quand au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

3. (a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2.
   (b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2b.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit A la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Exprimer A puis A^2 comme combinaisons linéaires de I et de J.
   (b) En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A.
   (c) Montrer que A est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien E, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.

On note $(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose : $u = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\epsilon_k$. On pose aussi :

$\forall i \in [\![0,n]\!],\ e_i = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}(\epsilon_i - \langle\epsilon_i, u\rangle u)$.

2. Calculer la norme du vecteur u.
3. (a) Montrer que, pour tout i de $[\![0,n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$.
   (b) Montrer également que, pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $[\![0,n]\!]$, on a : $\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$.
   (c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \dots, e_n$ appartiennent tous au sous espace $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ de E.
   (d) Montrer, en utilisant le résultat de la question 1c que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F.
4. On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall (x,y) \in F\times F,\ f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$
   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
   (b) Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$, en distinguant les cas $i=j$ et $i \neq j$.
   (c) En déduire que : $\forall (x,y) \in F\times F,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle$.
   (d) En déduire également que, pour tout x de F, on a : $\|x\|^2 = \dfrac{n}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle^2$.

Problème 4

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ ka base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ e_k = X^k$.

Partie I - Étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
   (b) Montrer que : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \varphi(e_i) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   (c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
   (d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.

(b) Déterminer φ^{-1} puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

(c) On donne la fonction `Python` suivante :

```
1 def mat_phi(n):
    M = np.eye(n+1)
    for k in range(n):
      M[k,k+1] = -k
5   A = ...
    return A
```

Compléter la ligne 5 pour que la matrice A de φ dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ soit renvoyée.

Partie II - Étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

5. (a) Donner la valeur de $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

   (b) Établir que, pour tout entier naturel k, on a : $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \mathrm{e}^{-x}$.

6. **Informatique**

   (a) On admet que, si `u` est un tableau `numpy`, la commande `np.prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u` et la commande `np.cumprod(u)` renvoie un tableau de même format que `u` dont le $k^{\text{ème}}$ élément est le produit des k premiers éléments de `u`.

   Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b pour compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle calcule et renvoie la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, les valeurs de x et de k étant passées en paramètres.

```
def val_int(x,k):
  p = np.prod(np.arange(1,k+1))
  u = ... / ...
  s = p * ... * np.exp(-x)
  return s
```

   (b) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que : $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$.

   En déduire l'expression manquante de la fonction `Python` suivante afin qu'elle permette de calculer de de renvoyer une valeur approchée de $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ grâce à la méthode de Monte-Carlo.

```
def int_mc(x,k):
  z = rd.exponential(1,100000)
  s = np.exp(-x)*np.mean(...)
  return s
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

7. (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F, F' et P.

   (c) Montrer que ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de ψ pour une valeur propre λ non nulle.

   (a) Utiliser la relation obtenue à la question 7b pour établir que : $P' = \frac{\lambda-1}{\lambda} P$.

   (b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de ψ.

   (c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ψ (on ne demande pas le sous-espace propre associé).

9. (a) Montrer que les endomorphismes φ et ψ sont égaux.

   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors : $\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0$.