Correction DS 1 - EDHEC 2017 (Cubes)

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :
$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$.

1. (a) Il suffit de faire :

```python
def f(x,n):
    y = 0
    for i in range(...):
        y = y + x**i
    return y
```

(b) Pour $x \neq 1$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométriques de raison $x \neq 1$. On a donc :

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.}$$

Pour $x = 1$, on a simplement : $\boxed{f_n(x) = n.}$ On peut donc écrire :

```python
def f(x,n):
    if x == 1:
        y = n
    else:
        y = x*(1-x**n)/(1-x)
    return y
```

2. f_n est une fonction polynomiale donc dérivable. On a :

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} kx^{k-1}.$$

Pour $x \in [0,1]$, on a donc $f_n'(x) > 0$. Ainsi f_n est strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n$. Comme f est dérivable, f est bien continue. Donc d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1.}$

3. (a) On a :

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k}_{=f_n(\alpha_n)=1} + \underbrace{\alpha_n^{n+1}}_{\geqslant 0} \geqslant 1.}$$

Ainsi, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

Or f_{n+1} est une bijection croissante. La bijection réciproque est donc également croissante et on en déduite :

$$\boxed{\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}}$$

c'est-à-dire (α_n) est une suite décroissante.

(b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée (par 0) donc $\boxed{\text{elle converge (limite monotone).}}$

4. (a) On résout :

$$\begin{aligned} f_2(\alpha_2) &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha_2 + \alpha_2^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha_2^2 + \alpha_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

La première solution est strictement négative. Donc nécessairement (puisque $\alpha_2 \in [0,1]$ existe et est unique) :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$$

De plus, comme $4 < 5 < 9$, on a $2 < \sqrt{5} < 3$ puis $1/2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$.

$\boxed{\text{Donc on a bien } 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 \text{ (et même strictement).}}$

(b) Comme (α_n) est décroissante, on a : $foralln \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant \alpha_2$. Donc, par croissante de la fonction puissance, $\alpha_n^{n+1} \leqslant \alpha_2^{n+1}$. Comme tous les termes sont positifs, on peut écrire :

$$0 \leqslant \alpha_n^{n+1} \leqslant \underbrace{\underbrace{\alpha_2}_{<1}^{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc, par encadrement : $\boxed{\alpha_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

(c) On a $f_n(\alpha_n) = 1$ donc :

$$\alpha_n \times \frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n} = 1$$

puisque $\alpha_n \neq 1$ dès $n = 2$. Par équivalence, on obtient :

$$\frac{\alpha_n(1-\alpha_n^n)}{1-\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{1-\alpha_n^{n+1}}{2}.$$

Or $\alpha_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$$

5. C'est un programme de recherche de solutions par balayage : on calcule successivement $f_n(0)$, $f_n(0,001)$, $f_n(0,002)$, etc jusqu'à obtenir une valeur supérieur à 1. Comme f_n est continue et comme $f_n(x) = 1$ a une unique solution, la valeur précédent l'arrêt et la valeur de x à l'arrêt forment un encadrement (à $0,001$ près) de la solution.

Le résultat renvoyé est donc nombre comensurable à $0,001$ supérieur ou égal à α_n et c'est donc une approximation de α_n à $0,001$ près.

Exercice 2

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{M_n}(x) &= P(M_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) \\ &\underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.} \end{aligned}$$

F_n est clairement continue sur $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. De plus, on calcule aisément :

$$\lim_{x\to 0^-} F_{M_n}(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = \lim_{x\to 0^+} x^n = \lim_{x\to 0^+} F_{M_n}(x)$$

et :

$$\lim_{x\to 1^-} F_{M_n}(x) = \lim_{x\to 1^-} x^n = 1 = \lim_{x\to 1^+} 1 = \lim_{x\to 1^+} F_{M_n}(x).$$

Donc F_{M_n} est également continue en 0 et 1. F_{M_n} est donc continue sur $\mathbb{R}$.

F_{M_n} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1. $\boxed{\text{Donc } M_n \text{ est bien une variable à densité.}}$

(b) Avec ce qui précède, on a pour tout x différent de 0 et de 1 :

$$F'_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

Ainsi, par exemple, la fonction :

$$\boxed{f : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

est une densité pour M_n.

(c) M_n admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.

Or, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x \times nx^{n-1}\mathrm{d}x = \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}.$$

Comme tous les termes sont positifs (ou nuls), la convergence est absolue et dDonc M_n admet une espérance. De plus :

$$\boxed{E(M_n) = \frac{n}{n+1}.}$$

De même, on a sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{M_n}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \times nx^{n-1}\mathrm{d}x = \left[n\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}.$$

Comme la convergence est absolue, d'après le théorème de transfert, on a :

$$\boxed{E(M_n^2) = \frac{n}{n+2}.}$$

(d) On cherche à majorer une probabilité et la question précédente parle d'espérance. Cela nous pousse à considérer l'inégalité de Markov.

On a :

$$\begin{aligned} E((M_n-1)^2) &= E(M_n^2 - 2M_n + 1) = \frac{n}{n+2} - 2\frac{n}{n+1} + 1 \\ &= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Comme la variable aléatoire $(M_n-1)^2$ est positive, on a d'après l'inégalité de Markov, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\boxed{P((M_n-1)^2 \geqslant \epsilon^2) \leqslant \frac{E((M_n-1)^2)}{\epsilon^2} \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)\epsilon^2}.}$$

(e) Comme $P((M_n-1)^2 \geqslant \epsilon^2) = P(|M_n-1| \geqslant \epsilon)$, on a :

$$0 \leqslant P(|M_n-1| \geqslant \epsilon) \leqslant \underbrace{\frac{2}{(n+1)(n+2)\epsilon^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n-1| \geqslant \epsilon) = 0}$$

et cela est valable pour tout $\epsilon > 0$. Dit autrement, $\boxed{M_n \text{ converge en probabilité vers } 1.}$

2. (a) Il suffit d'utiliser la formule de Y_n en se rappelant que M_n est le maximum des X_i :

```
def f(n):
    x = rd.random(n)
    y = n*(1-np.max(x))
    return y
```

(b) Les graphiques permettent de représenter visuellement une densité d'une loi exponentielle d'une part et de Y_n d'autre part. On remarque une extrême similarité entre les deux densités.
Cela suggère que pour n grands, la loi de Y_n est proche de la loi exponentielle (de paramètre 1). Dit autrement, on peut conjecturer que :

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

où Y désigné une variable suivant la bonne loi.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leqslant x) = P(n(1-M_n) \leqslant x) \\
&= P\left(M_n \geqslant 1-\frac{x}{n}\right) \underset{M_n \text{ à densité}}{=} P\left(M_n > 1-\frac{x}{n}\right) \\
&= 1 - P\left(M_n \leqslant 1-\frac{x}{n}\right) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x\in[0,n] \\ 1 & \text{si } x>n \end{cases}.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \geqslant 0$ fixé. Pour n suffisamment grand, on a : $F_n(x) = 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

La limite à calculer est une limite classique à savoir faire. On a :

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left[1-\frac{x}{n}\right]\right)$$

Or :

$$\ln\left[1-\frac{x}{n}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}.$$

Donc $n\ln\left[1-\frac{x}{n}\right] \underset{n\to+\infty}{\to} -x$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-\mathrm{e}^{-x}.}$$

(c) On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 sur $\mathbb{R}_+$. On a facilement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0}$$

si $x<0$. Donc en tout point de continuité de la fonction de répartition de la loi exponentielle, on a la bonne limite, c'est-à-dire :

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

Exercice 3

1. (a) On a clairement :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{-(n+1)I + J.} \end{aligned}$$

Ensuite, il faut remarquer que :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & \cdots & n \\ n & n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix} = nJ.$$

Ainsi, puisque I et J commutent (I commute avec toute matrice), on peut appliquer la formule du binôme :

$$\boxed{A^2 = (J-(n+1)I)^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I = (n+1)^2 I - (n+2)J.}$$

(b) Pour un polynôme annulateur, on a le droit d'utiliser les puissances de A (donc vraisemblablement A et A^2 dans notre cas) ainsi que I (qui est en fait A^0). Notre premier but est donc d'éliminer J.
On constate que $(n+2)A + A^2 = -(n+2)(n+1)I + (n+2)J + (n+1)^2 I - (n+2)J = -(n+1)I$ et donc :

$$\boxed{X^2 + (n+2)X + (n+1)}$$

est un polynôme annulateur de A. Les racines de ce polynôme sont les potentiels valeurs propres (elles peuvent ne pas être valeurs propres). Or ce polynôme est de degré 2 et de discriminant :

$$\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2.$$

Il a donc exactement deux racines qui sont :

$$\frac{-(n+2)+n}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{-(n+2)-n}{2} = -(n+1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, -(n+1)\}.}$$

(c) Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, le noyau de A est trivial et donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

2. Comme $(\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une base orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k'=0}^{n} \epsilon_{k'} \rangle \\ &\underset{\text{bilinéarité}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{k'=0}^{n} \underbrace{\langle \epsilon_k, \epsilon_{k'} \rangle}_{\neq 0 \text{ seulement si } k=k'} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\|\epsilon_k\|^2}_{=1} \boxed{= 1.} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\|u\| = 1.}$

On peut aller plus vite. On a ici redémontré une formule de cours.

3. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} \|e_i\|^2 &= \frac{n+1}{n}\|\epsilon_i - \langle \epsilon_i, u\rangle u\|^2 \\ &= \frac{n+1}{n}(\underbrace{\|\epsilon_i\|^2}_{=1} - 2\langle \epsilon_i, u\rangle\langle \epsilon_i, u\rangle + \langle \epsilon_i, u\rangle^2 \underbrace{\|u\|^2}_{=1}) \\ &= \frac{n+1}{n}(1 - \langle \epsilon_i, u\rangle^2). \end{aligned}$$

Or :

$$\langle \epsilon_i, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\langle \epsilon_k, \epsilon_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Donc :

$$\|e_i\|^2 = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Donc $\boxed{\|e_i\| = 1.}$

(b) Soient $i, j \in [\![0, n]\!]$ avec $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j\rangle &= \langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}(\epsilon_i - \langle \epsilon_i, u\rangle u), \sqrt{\frac{n+1}{n}}(\epsilon_j - \langle \epsilon_j, u\rangle u)\rangle \\ &= \frac{n+1}{n}\left(\underbrace{\langle \epsilon_i, \epsilon_j\rangle}_{=0} - \langle \epsilon_i, u\rangle\langle u, \epsilon_j\rangle - \langle \epsilon_j, u\rangle\langle \epsilon_i, u\rangle + \langle \epsilon_i, u\rangle\langle \epsilon_j, u\rangle \underbrace{\langle u, u\rangle}_{=1}\right) \\ &= \frac{n+1}{n}\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) \boxed{= -\frac{1}{n}.} \end{aligned}$$

(c) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$\langle e_i, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\langle \epsilon_i - \langle \epsilon_i, u\rangle u, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\langle \epsilon_i, u\rangle - \langle \epsilon_i, u\rangle \underbrace{\langle u, u\rangle}_{=1}\right) = 0.$$

Donc, on a bien $\boxed{e_i \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$

(d) Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$. On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$0 = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\rangle = \lambda_i - \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}\lambda_k.$$

Les (λ_k) sont donc solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{n} - \dots - \frac{\lambda_n}{n} &=& 0 \\ -\frac{\lambda_1}{n} + \lambda_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{n} &=& 0 \\ \vdots &\vdots& \vdots \\ \frac{\lambda_1}{n} - \frac{\lambda_2}{n} - \dots + \lambda_n &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n}\begin{pmatrix} -n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Et comme A est inversible, l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre.}}$ De plus, $\dim F = \dim(\mathrm{Vect}(u)^\perp) = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(u) = (n+1) - 1 = n$. Donc, par égalité de la dimension et du cardinal, $\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } F.}$

4. (a) • **Linéarité à droite :**
Soit $(x, y, z) \in F^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x, y+\lambda z) &= \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y+\lambda z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y+\lambda z\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle(\langle y, e_k\rangle + \lambda\langle z, e_k\rangle) - \frac{n+1}{n}(\langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle\right] + \lambda\left[\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, z\rangle\right] \\
&= f(x, y) + \lambda f(x, z).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien linéaire à droite.}}$

• **Symétrie :**
Soit $(x, y) \in F^2$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle y, x\rangle \\
&= f(y, x).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien symétrique.}}$

Comme f est linéaire à droite et symétrique, $\boxed{f \text{ est également linéaire à gauche.}}$
Donc $\boxed{f \text{ est bien une forme bilinéaire symétrique}}$ puisqu'elle est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Attention ! Le sujet ne demande pas de montrer que c'est un produit scalaire. Il n'y a donc besoin de montrer ni la positivité ni le caractère défini.

(b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Calculons $f(e_i, e_j)$.

• **Cas $i = j$:**
On a :

$$\begin{aligned}
f(e_i, e_i) &= \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_i, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{=1} \\
&= \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle^2}_{=1} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle^2}_{=\left(-\frac{1}{n}\right)^2} - \frac{n+1}{n} \\
&= 1 + \frac{n}{n^2} - \frac{n+1}{n} \boxed{= 0.}
\end{aligned}$$

• **Cas $i \neq j$:**
On a :

$$\begin{aligned}
f(e_i, e_j) &= \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=-\frac{1}{n}} \\
&= \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{=1}\underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=-\frac{1}{n}} + \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=-\frac{1}{n}}\underbrace{\langle e_j, e_j\rangle}_{=1} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq i,j}}^{n} \underbrace{\langle e_i, e_k\rangle}_{=-\frac{1}{n}}\underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{=-\frac{1}{n}} + \frac{n+1}{n^2} \\
&= -\frac{2}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n+1}{n^2} = \frac{-2n+n-1+n+1}{n^2} \boxed{= 0.}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on obtient $\boxed{f(e_i, e_j) = 0.}$

(c) Soit désormais $(x, y) \in F^2$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad \text{et} \quad y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &\underset{\text{Linéarité à gauche}}{=} \sum_{i=1}^n x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &\underset{\text{Linéarité à droite}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, y \rangle.}$$

(d) On pose désormais $y = x$ dans l'égalité précédente et on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \underbrace{\langle x, e_k \rangle \langle x, e_k \rangle}_{=\langle x, e_k \rangle^2} = \frac{n+1}{n} \underbrace{\langle x, x \rangle}_{=\|x\|^2}$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2.}$$

Problème 4

Partie I - Étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a également $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$ (puisque la dérivation fait perdre des degrés). Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{on a bien } \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$

   Soient maintenant $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k=0}^n (P + \lambda Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^n (P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}) = \sum_{k=0}^n P^{(k)} + \lambda \sum_{k=0}^n Q^{(k)} = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q).$$

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

   Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) On a :

$$\varphi(e_0) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^n 1^{(k)} = 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n \text{ fois}} \boxed{= e_0.}$$

   Comme e_0 est non nul, c'est un vecteur de φ pour $\boxed{\text{la valeur propre 1.}}$

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = \sum_{k=0}^{n} (e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)}.$$

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\deg(e_j)^{(k)} < \deg e_j$ (car $e_j \neq 0$). De plus :

$$\deg \sum_{k=1}^{n} (e_j)^{(k)} \leqslant \max_{k \in [\![1,n]\!]} ((e_j)^{(k)}).$$

Et comme $\deg e_j = j$, on obtient $\deg(\varphi(e_j) - e_j) < j$ et comme le dégré est entier :

$$\boxed{\deg(\varphi(e_j) - e_j) \leqslant j - 1.}$$

Ainsi on a bien $\boxed{\varphi(e_i) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$

(c) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, comme $\varphi(e_j) - e_j \in\in \mathbb{R}_{j-1}[X]$, il se décompose sur $(1, X, \ldots, X^{j-1})$ c'est-à-dire sur $(e_0, e_1, \ldots, e_{j-1})$.
On a donc :

$$\varphi(e_j) = e_j + \sum_{k=0}^{j-1} \mu_k e_k$$

où les μ_k sont des coefficients réels. En particulier, dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, les colonnes 1 à n de la matrice de φ ont des coefficients non nuls uniquement sur les lignes 0 à j. Avec $\varphi(e_0) = e_0$, cela donne une matrice de la forme :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Les coefficients diagonaux se lisent en reprenant le coefficient de vant e_j dans $e_j + \sum_{k=0}^{j-1} \mu_k e_k$.

C'est donc bien $\boxed{\text{une matrice triangulaire supérieur avec des 1 uniquement sur la diagonale.}}$

Les valeurs propres se lisent sur la diagonale. On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) = \{1\}.}$

(d) φ n'admet pas 0 comme valeur propre, donc son noyau est trival et donc φ est injectif. Comme φ est un endomorphisme, par égalité des dimensions, φ est aussi surjectif et donc bijectif.

φ est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{\text{c'est donc bien un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\varphi(P - P') \underset{\text{linéarité}}{=} \varphi(P) - \varphi(P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} (P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)} = P - P^{(n+1)}.$$

Comme $\deg P \leqslant n$, on a nécessairement $P^{(n+1)} = 0$. Et donc :

$$\boxed{\varphi(P - P') = P.}$$

(b) On pose $\psi : P \mapsto P - P'$. On a alors $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc $\psi = \varphi^{-1}$, c'est-à-dire $\boxed{\varphi^{-1}(P) = P - P'.}$

Habituellement, il faut montrer également que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Mais cela est nécessaire pour montrer que φ est bijective.
Ici, on sait déjà que φ^{-1} existe. On peut donc composer à gauche $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1}$ qui donne $\psi = \varphi^{-1}$.

On a $\varphi^{-1}(e_0) = e_0 - e_0' = e_0$. Puis, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\varphi^{-1}(e_j) = e_j - e_j' = X^j - jX^{j-1} = e_j - je_{j-1}.$$

Et donc la matrice de φ^{-1} est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Le code donné construit la matrice de φ^{-1}. Pour obtenir la matrice de φ, il suffit de calculer l'inverse :

```python
def mat_phi(n):
  M = np.eye(n+1)
  for k in range(n):
    M[k,k+1] = -k
  A = al.inv(M)
  return A
```

Partie II - Étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ est généralisé uniquement en $+\infty$ (si $x \in \mathbb{R}$).
Or $t^k \mathrm{e}^{-t} = \underbrace{t^k \mathrm{e}^{-t/2}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0} \mathrm{e}^{-t/2} = \underset{t\to+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t/2})$. Or l'intégrale $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2} \mathrm{d}t$ converge donc, par négligeabilité, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \text{ converge également}}$ (et même absolument).

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi :

$$\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_x^{+\infty} a_k t^k e^{-t} \mathrm{d}t$$

$\boxed{\text{converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.}}$

5. (a) Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$\int_x^A \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_x^A = -\underbrace{\mathrm{e}^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc $\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \text{ converge}}$ et :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}.}$$

(b) Montrons le résultat demandé par récurrence.

- **Initialisation :** pour $k = 0$, on a d'une part :

$$\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}.$$

D'autre part, on a :

$$k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \mathrm{e}^{-x} = 0! \sum_{i=0}^{0} \frac{x^i}{i!} \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Donc on a bien :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^0 \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 0! \sum_{i=0}^{0} \frac{x^i}{i!} \mathrm{e}^{-x}.}$$

- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$. Montrons que la relation tient pour $k+1$.

  Soit $A \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_x^A \underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{e^{-t}}_{=v'(t)} dt &\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{t^{k+1}}_{=u(t)} \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)}\right]_x^A - \int_x^A \underbrace{(k+1)t^k}_{=u'(t)} \underbrace{(-e^{-t})}_{=v(t)} dt \\ &= -\underbrace{A^{k+1}e^{-A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + x^{k+1}e^{-x} + (k+1) \underbrace{\int_x^A t^k e^{-t} dt}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt} .\end{aligned}$$

  Donc, en passant à la limite $A \to +\infty$, puisque toutes les intégrales convergent, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt &= x^{k+1}e^{-x} + (k+1) \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt \\ &\underset{\text{HR}}{=} (k+1)! \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{-x} + (k+1)k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \\ &= \boxed{(k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.}\end{aligned}$$

  Donc la propriété est bien héréditaire.

Par récurrence, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.}$

6. (a) On va évidement utiliser la formule que l'on vient de démontrer. On peut voir que `p` contient $k!$. Donc, le terme manquant de la dernière doit être la somme $\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$.

   On peut procéder ainsi : dans la variable `u`, on construit le tableau qui contient les termes $\frac{x^i}{i!}$ et dans la dernière ligne, on en fait la somme.

   Pour faire tenir ça dans la place prévue, il faut bien maîtriser `Python`. Il faut se rappeler que les opérations usuelles se font terme à terme sur les tableaux. On peut donc écrire :

```python
def val_int(x,k):
  p = np.prod(np.arange(1,k+1))
  u = (x**np.arange(1,k+1)) / np.cumprod(np.arange(1,k+1))
  s = p * (1 + np.sum(u)) * np.exp(-x)
  return s
```

   On a séparé le terme $i = 0$ qui pose des problèmes de division par zéro s'il est mal géré.

   (b) Posons $t = u + x$. La changement est $\mathcal{C}^1$ et bijectif. Avec les bonnes limites, on a donc que les intégrales :

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-(u+x)} du$$

   ont même nature et sont égales en cas de convergence. Comme la première converge, on a :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-(u+x)} du = e^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u} du.}$$

   Ainsi, à un facteur e^{-x} près, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ peut être considéré comme une espérance $E((X+x)^k$ où X suit une loi exponentielle de paramètre 1. On peut donc utiliser le code suivant :

```python
def int_mc(x,k):
  z = rd.exponential(1,100000)
  s = np.exp(-x)*np.mean((z + x)**k)
  return s
```

7. (a) *A priori*, ψ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Commençons par noter $\boxed{\text{qu'elle est linéaire}}$ par linéarité de l'évaluation et par linéarité de l'intégrale.
Montrons que ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Notons $P = a_0X^0 + \cdots +_n X^n$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k\right) \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^x \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{=k!\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{a_k x^i}{i!}. \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une formule polynomiale et le degré le plus élevé est atteint pour $i = n$ donc $\deg \psi(P) \leqslant n$.
D'où $\boxed{\psi(P) = F \in \mathbb{R}_n[X].}$

Donc $\boxed{\psi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

(b) On a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{=\text{ constante}} - \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \right)$$

Or, d'après le théorème fondamentale de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ puisque $t \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue.
Donc F est le produit de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ et $\boxed{\text{est donc } \mathcal{C}^1.}$ De plus :

$$\boxed{F'(x) = \mathrm{e}^x \left(\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) - \mathrm{e}^x P(x)\mathrm{e}^{-x} = F(x) - P(x).}$$

(c) Montrons que ψ est injective. Soit $P \in \mathrm{Ker}\psi$. Montrons que $P = 0$.
On a $\psi(P) = 0$, c'est-à-dire $F = 0$. Or, d'après la question précédente :

$$\underbrace{F'}_{=0} = \underbrace{F}_{=0} - P.$$

Donc $\boxed{P = 0.}$ ψ est bien injective. Comme c'est un endormorphisme en dimension finie, par égalité des dimensions, ψ est également surjective et donc bijective.
Donc $\boxed{\psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

8. (a) On a $\psi(P) = \lambda P$. Or $\psi(P) = F$ vérifie :

$$F' = F - P.$$

Donc :

$$\lambda P' = \lambda P - P$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P}$$

puisque $\lambda \neq 0$.

(b) Comme $P \neq 0$, on a $\deg P \geqslant 0$. Cela implique en particulier que $\deg P' < \deg P$ (dit autrement dériver fait toujours perdre un degré sauf pour le polynôme nul).
Donc $\deg \frac{\lambda-1}{\lambda} P < \deg P$. Cela n'est possible que si $\lambda = 1$ (car sinon les degrés sont égaux).
Donc $\boxed{\lambda = 1.}$ 1 est bien la seule valeur propre possible pour ψ puisque le cas $\lambda = 0$ est exlus car ψ est un automorphisme. On peut encore écrire :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\psi) \subset \{1\}.}$$

(c) Il suffit de montrer l'inclusion réciproque en trouvant un vecteur propre pour la valeur propre 1. On peut par exemple calculer $\psi(1)$. On a :

$$\boxed{\psi(1)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = 1.}$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\psi) = \{1\}.}$$

9. (a) **Méthode 1 :** Il suffit de vérifier que φ et ψ coïncident sur une base. Par exemple, avec la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$, on a :

$$\psi(e_k)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\mathrm{e}^{-x} \boxed{= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}.}$$

Pour φ, calculons :

$$\begin{aligned}
\varphi(e_k)(x) &= \sum_{i=0}^{n} (e_k)^{(i)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \\
&= k! \sum_{i'=0}^{k} \frac{x^{i'}}{i'!} \boxed{= \psi(e_k)(x).}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\psi = \varphi.}$

Méthode 2 : On a vu en posant $F = \psi(P)$ que $F' = F - P$. Donc $P = F - F'$. Ainsi $F \mapsto F - F'$ est la bijection réciproque de ψ. Or on reconnaît φ^{-1}. Donc ψ et φ ont la même bijection réciproque, $\boxed{\text{ce sont les mêmes endomorphismes.}}$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \geqslant a,\ P(x) \geqslant 0$.
Appliquons l'égalité obtenue $\psi(P) = \varphi(P)$. Pour $x \geqslant a$, on a :

$$\underbrace{\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x)$$

où la positivité du terme de gauche est obtenue par positivité des facteurs et positivité de l'intégrale. On a bien :

$$\boxed{\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0.}$$