Rédaction 5 - Analyse-Synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est un des grands nouveaux de la classe préparatoire. En fait, vous avez sans doute déjà fait des raisonnements similaires, mais pas de manière aussi formelle. Le but de l'analyse-synthèse est de trouver la totalité des objets mathématiques remplissant une certaine condition. Dit de manière plus mathématique, le raisonnement par analyse-synthèse permet de déterminer une condition nécessaire et suffisante (parfois abrégée CNS) pour remplir une certaine propriété.

1 Introduction

Commençons par un exemple simple :

`Résoudre dans` $\mathbb{R}$ `l'équation` $5x+3=2x-3$.

Il s'agit bien de trouver tous les objets mathématiques (en l'occurence des nombres réels) qui vérifient une certaine condition (ici si l'objet se nomme x, il faut que $5x+3=2x-3$).

Comment résout-on ce genre de question d'habitude ? De la manière suivante[1] :

✓ `Soit` $x \in \mathbb{R}$. `On a :`

$$\begin{aligned} 5x+3=2x-3 &\Leftrightarrow 5x-2x=-3-3 \\ &\Leftrightarrow 3x=-6 \\ &\Leftrightarrow x=-2. \end{aligned}$$

Où est l'analyse-synthèse là-dedans ? Et bien l'analyse et la synthèse correspondent aux deux sens de lecture des équivalences.

1. Lorsque l'on descend les équivalences, on lit :

$$5x+3=2x-3 \quad \Rightarrow \quad 5x-2x=-3-3 \quad \Rightarrow \quad 3x=-6 \quad \Rightarrow \quad x=-2.$$

Dit autrement, on est en train de trouver une condition **nécessaire** pour vérifier l'équation. Dans ce sens on dit :

`Si` $5x+3=2x-3$ `alors` **nécessairement** $x=-2$.

Cette étape correspond à l'**analyse**. On analyse ici quels éléments sont *possibles*.

2. Lorsque l'on remonte les équivalences, on lit :

$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad 3x=-6 \quad \Rightarrow \quad 5x-2x=-3-3 \quad \Rightarrow \quad 5x+3=2x-3.$$

Dit autrement, on est en train de trouver une condition **suffisante** pour vérifier l'équation. Dans ce sens on dit :

`Il` **suffit** `que` $x=-2$ `pour que` x `vérifie` $5x+3=2x-3$.

Cette étape correspond à la **synthèse**. On conclue en vérifiant que tous les éléments trouvés vérifient la propriété.

2 Présentation

Est-ce juste cela l'analyse-synthèse ? Des mots compliqués placés sur des concepts déjà vus ? Non, bien sûr que non. J'illustre juste ici que vous avez déjà fait ce genre de raisonnement sans le savoir, comme M. Jourdain faisait de la prose. Mais l'analyse-synthèse sert justement lorsqu'une progression par équivalence n'est pas possible ou trop compliquée. Dans ce cas, on sépare les deux étapes et cela donne la rédaction suivante.

1. Notez l'utilisation correcte des variables...

Méthode

Pour répondre, par analyse-synthèse, à une question de la forme :

`Trouver tous les` x `de` E `vérifiant` $\mathcal{P}(x)$.

on rédige de la manière suivante :

✓ `Déterminons l'ensemble des` x `de` E `vérifiant` $\mathcal{P}(x)$ `par analyse-synthèse :`

- **Analyse :** `Soit` x `dans` E `vérifiant` $\mathcal{P}(x)$.

  $\vdots$

  `Donc il existe` y `dans` F `tel que` $x = f(y)$.
- **Synthèse :** Soit y dans F. On pose $x = f(y)$. Montrons que x est bien dans E et qu'il vérifie $\mathcal{P}(x)$.

  $\vdots$

Dans la première étape, on cherche à déterminer une *tête* de x. L'idéal est de trouver une formule. Dans la seconde étape, on reprend la formule trouvée et on vérifie qu'elle fonctionne bien. Si certes en général, l'étape de synthèse est très facile, il ne faut pas croire que c'est une redite de l'analyse. Remarquez que l'analyse commence par :

`Soit` x `dans` E `vérifiant` $\mathcal{P}(x)$.

On suppose donc qu'un tel x **existe**. Si jamais un tel x n'existe pas, le reste du raisonnement ne suit pas. L'étape de la synthèse permet justement de vérifier l'existence de l'élément et ainsi de conclure. Dit encore autrement :

1. Dans l'analyse, on restreint le champ des possibles. À partir de la propriété, on trouve tous les x **possibles** qui la vérifient.
2. Dans la synthèse, on vérifie que ce ne sont pas **que** des possibilités. On vérifie que ce sont **bel et bien** des solutions du problème proposé.

3 Exemples

Exemple : On veut trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y) + 1$.

✓ Déterminons par analyse-synthèse, toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y) - 1.$$

- **Analyse :** soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

  $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y) - 1.$$

  La propriété précédente est vraie pour tous x et y réels. Elle est donc vraie pour des réels fixés. Par exemple, pour $x = y = 1$, on a :

  $$f(1 \times 1) = f(1) = f(1)f(1) - 1.$$

  Donc $f(1)$ est solution de l'équation d'inconnue t réelle :

  $$t = t^2 - 1.$$

  C'est une équation du second degré dont le discriminant est :

  $$\Delta = 1 - 4 \times (-1) = 5.$$

Le discriminant est positif donc l'équation a deux solutions réelles qui sont :

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc :

$$f(1) \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

On a donc des valeurs possibles pour f au point 1.
Reprenons l'équation de départ et posons uniquement : $x = 1$. On a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(1)f(y) - 1.$$

On en déduit :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \frac{1}{1-f(1)}$$

où l'on a pu effectuer la division car $f(1) \neq 1$. Or $\frac{1}{1-f(1)} = f(1)$ donc :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(1).$$

On en déduit que les fonctions possibles sont les fonctions constantes égales à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou à $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- **Synthèse :** vérifions que les fonctions constantes égales à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou à $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont bien solutions du problème.
  Commençons par le cas de la fonction constante égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que l'on notera g. Soient x et y dans $\mathbb{R}$. On a d'une part :

  $$g(xy) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

  On a d'autre part :

  $$\begin{aligned} g(x)g(y) - 1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - 1 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

  On a bien $g(xy) = g(x)g(y) - 1$ et donc g est bien solution.
  Par un calcul similaire, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ vérifie également $h(xy) = h(x)h(y) - 1$ et est donc bien solution du problème.

Donc les fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y) - 1$$

sont les deux fonctions constantes h et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Remarque :

> Prouver une existence est difficile : il faut une bonne intuition de la forme de l'objet recherché. L'analyse synthèse est une méthode possible pour trouver une telle forme.
> En effet, la synthèse a exactement la même forme qu'une preuve d'existence : on pose via une formule l'objet qui nous intéresse et on vérifie ses propriétés. Mais contrairement à une preuve d'existence *nue*, les formules ici ne sortent pas de nulle part : elles proviennent de l'analyse. On peut donc utiliser une analyse pour trouver ou deviner la forme de ce que l'on cherche et ensuite utiliser la synthèse pour conclure quant à l'existence.

Exemple : On veut montrer que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, il existe une unique fonction continue $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un unique réel a tels que : $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + a.$

✓ Montrons le résultat ci-dessus par analyse-synthèse.

- **Analyse :** soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Et soient $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + a.$$

Intégrons la seconde équation entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 a\mathrm{d}t.$$

Or $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ donc :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = a.$$

On a donc déterminé a à partir de f.
Reprenons l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + a$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - a = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

On vient de déterminer g à partir de f uniquement.
Donc si un tel g et un tel a existent alors nécessairement :

$$a = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

L'analyse prouve l'unicité.

- **Synthèse :** soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$a = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

On pose également la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

g est bien continue comme somme de fonctions continues.
De plus, soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(x) + a = f(x) - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

On a donc bien $f(x) = g(x) + a$.
La synthèse prouve l'existence.

Remarque :

La démonstration par analyse-synthèse nous a donné plus que l'existence : elle nous a donné l'existence **et** l'unicité. En effet, dans l'analyse on cherche toutes les têtes possibles de solutions. Mais si une seule tête sort, cela veut dire qu'il ne peut pas y avoir plus d'une solution. Dit autrement, sous condition d'existence, et si bien sûr l'analyse nous donne une unique possibilité, on a l'unicité de la solution.