TD4 - Intégrales généralisées

1 Intégration sur un segment

Exercice 1 - Un changement classique ⋆

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \cos(t) = \frac{1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1+\tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}.$$

2. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. En posant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ déterminer :

$$A = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t$$

et :

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos(\theta)\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 - IPP ⋆⋆

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^2 \arctan(x)\mathrm{d}x, \quad B = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln(x))\mathrm{d}x,$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4(x)}, \quad D = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x\ln(x)\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2},$$

$$E = \int_0^1 x^{\lambda}\ln(x)^n \mathrm{d}x, \quad (\lambda > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N})$$

$$F = \int_0^{\pi} \mathrm{ch}(t)\sin(2t)\mathrm{d}t, \quad G = \int_0^{\pi} (x^2+2x+2)\cos(2x)\mathrm{d}x,$$

$$H = \int_2^3 (3x^2-4x+1)\ln(x^5-x^4)\mathrm{d}x, \quad I = \int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t,$$

$$J = \int_0^1 (x+1)\arctan(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 - Sommes de Riemann ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}, \quad B = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$C = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Exercice 4 - Changement de variable⋆⋆⋆

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}\mathrm{d}x, \quad (t = x+\sin(x)) \\
B &= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x, \quad (t = \sqrt{x+1}) \\
C &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2-\sin(2x)}\mathrm{d}x, \quad (t = \sin(x)-\cos(x)) \\
D &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x^n+1)} \text{ où } n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad (t = 1/x) \\
E &= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x\mathrm{d}x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}, \quad (t = \sqrt{e^x-1}) \\
F &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\mathrm{d}x, \quad \left(t = x - \frac{1}{x}\right) \\
G &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\mathrm{d}x, \quad (t = 1/x) \\
H &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ où } a > 0, \quad (t = 1/x), \\
I &= \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x, \quad (t = x^{1/6}) \\
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x)\mathrm{d}x, \quad (t = \sin(x)) \\
K &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x)\mathrm{d}x. \quad (t = \tan(x))
\end{aligned}$$

2 Intégrales impropres

Exercice 5 ⋆

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur :

$$A = \int_0^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}t, \quad B = \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t,$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}e^{-e^{-x}}\mathrm{d}x, \quad D = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos t\mathrm{d}t,$$

$$E = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}.$$

Exercice 6 ⋆⋆

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\mathrm{d}t, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 - Pour l'algèbre bilinéaire ⋆⋆

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
est convergente. Montrer alors qu'elle est positive.
2. À quelle condition sur P a-t-on :
$$\int_0^{+\infty} P(t)^2\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0 \ ?$$

Exercice 8 ⋆⋆

Soit α un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence et calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 ⋆⋆

Justifier l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

et calculer sa valeur par une intégration par partie.

Exercice 10 ⋆ ⋆ ⋆

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\mathrm{d}x, \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}},$$

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\mathrm{d}u, \quad D = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}}.$$

Exercice 11 ⋆ ⋆ ⋆

Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et est négative.

3 Changements de variables

Exercice 12 ⋆⋆

Soit α un réel positif.

1. Déterminer deux constantes λ et μ telles que pour tout $t > 0$:
$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t+a}.$$
2. À l'aide du changement de variable $x = \mathrm{e}^t$, prouver la convergence de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + a}$$
et calculer sa valeur.

Exercice 13 ⋆⋆

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué.

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\mathrm{d}t, \quad (u = 1/t)\\
B &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad (u = \sqrt{t})\\
C &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t, \quad (x = 1/t)\\
D &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}. \quad (t = \mathrm{e}^x)
\end{aligned}$$

Exercice 14 - Intégrale de Fesnel ⋆ ⋆ ⋆

À l'aide du changement de variable $u = t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ converge.

4 Fonction Γ et intégrales à paramètre

Exercice 15 ⋆⋆

On pose :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \end{array} \right. .$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et déterminer f'. En déduire les variations de f.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x\ln(2)$ et $x^2\ln(2)$. En déduire les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

Exercice 16 - Γ aux demi-entiers ⋆⋆⋆

On rappelle que l'intégrale de Gauss vaut :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1. En réalisant le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale de Gauss, déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+t^3}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variations de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b}| \leq |a-b|.$$

   (b) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|.$$

   (c) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Soit $\alpha > 0$. On pose, sous réserve de convergence :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les intégrales I et J convergent.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\cos(t)-\cos(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t = \int_\epsilon^{\alpha\epsilon} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t.$$

3. En déduire que $J = \ln(\alpha)$.

Exercice 19 - $\zeta(2)$ ⋆⋆⋆⋆

On admet dans cet exercice que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose sous réserve de convergence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, I_n est convergente et que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $f(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \sum_{k=1}^n x\mathrm{e}^{-kx}$.
3. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. À l'aide du changement de variable $x = -\ln(t)$, prouver la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur.

5 Exercices de concours

Exercice 20 - Ecricome 1993 ⋆⋆

Justifier l'existence et calculer la valeur de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 - Ecricome 1994 ⋆⋆

Pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide du changement de variable $x = -(k+1)\ln t$, montrer que :

$$\int_0^1 t^k(\ln t)^k\mathrm{d}t$$

converge et donner sa valeur.

Exercice 22 - QSP ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

converge également.

Exercice 23 - Oral ESCP 2013 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$
converge. On note alors f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
3. (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$.
4. (a) En utilisant le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que :
$$f(x) = \ln(x)(\ln(x)-\ln(1+x))+\int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u. \qquad (1)$$
   (b) En déduire que f est dériable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variation de f.

Exercice 24 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la fonction $f_p : [1, +\infty[$ par :
$$f_p(t) = \frac{1}{t(t+1)(t+2)\cdots(t+p)}.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_p(t)\mathrm{d}t$. converge.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose alors :
$$I_p = \int_1^{+\infty} f_p(t)\mathrm{d}t.$$

2. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p\geq 1}$.
3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p\geq 1}$.
4. Pour p fixé, on *admet* l'existence de nombres réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus [\![-p, 0]\!],\ f_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\alpha_k}{t+k}.$$
Montrer que pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on a :
$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$
Indice : Pour tout $j \in [\![0, p]\!]$, on pourra multiplier la relation admise par $(t + j)$ et choisir une valeur particulière de t.
5. Calculer $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p sans intégrale sous forme d'une somme.

Exercice 25 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales :
$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
convergent.

On pose alors pour tout x réel :
$$C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
et :
$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

2. (a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tous réels u et h on a :
$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h\cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}.$$
   (c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x, $S'(x)$.
3. Déterminer pour tout réel x, une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.
4. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de :
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} D_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}} f(x) \end{array} \right. .$$
En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.
   (b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel $S(x) = A(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ avec A de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Établir la relation :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}}{2} \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$$
5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.