
DM 2 - ALGÈBRE LINÉAIRE

Pour le lundi 16/10/2023

Exercice 1 - EDHEC ECS 2001

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^2 , muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On note E l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la relation (\star) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = (1 + x^2)\varphi(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E , alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x , par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
 - (a) Vérifier que f est un élément de E .
 - (b) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) \int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.
Montrer que g est un élément de E .
4.
 - (a) Soit h une solution de (\star) . Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f , que h est combinaison linéaire de f et de g .
 - (b) Montrer finalement que (f, g) est une base de E .