

DM 2 - ALGÈBRE LINÉAIRE (CUBES)

Pour le vendredi 20/10/2023

Problème 1 - ESSEC ECS 2010 (partie 1)

On désigne par I l'intervalle $[1, +\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs réelles. On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E , on dit qu'une fonction y de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E , on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I , puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

1. Étude de l'équation (E_f) .

- (a) On considère $f \in E$ et $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Écrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, y(x) = e^{ax} (K - \int_1^x e^{-at} f(t) dt)$.
- (b) Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I , celle-ci est unique.
- (c) Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est convergente.
- (d) Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I .

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question 1d.

2. Linéarité de U .

- (a) Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
- (b) Montrer que U est un endomorphisme de E .
- (c) U est-il injectif?
- (d) On définit les puissances successives de U par $U^0 = \text{Id}_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $U^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t) dt$.

3. Cas des fonctions exponentielles.

- (a) Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
- (b) En déduire que, pour tout réel $\lambda \in]0, \frac{1}{a}]$, $\ker(U - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$.
- (c) Pour tout entier naturel n , expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I , préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} [U^n(f)](x)$.

4. Cas des fonctions sinus et cosinus.

Dans cet exemple **seulement (ensemble de la question 4)**, on prend $a = 1$.

- (a) Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
- (b) Montrer que le sous-espace vectoriel P de E engendré par les fonctions sin et cos est stable par U et que (\sin, \cos) en est une base.

Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_P : \begin{cases} P & \rightarrow & P \\ f & \mapsto & U(f) \end{cases}$.

- (c) Calculer M^2 , M^3 et M^4 . Expliciter M^n pour tout entier naturel n , puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. Une autre famille de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.

- Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n , φ_n et ψ_{n-1} .
- Pour p entier naturel, montrer que le sous-espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
- On prend ici $p = 2$.

Écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 & \rightarrow F_2 \\ f & \mapsto U(f) \end{cases}$.

Calculer T_2^n pour tout entier naturel b , puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.

6. Une autre expression de $U(f)$.

Pour $f \in E$, montrer que : $\forall x \in I, U(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t) dt$.

7. Positivité de U .

- Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leq U(|f|)$.

On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.

- Montrer que ψ est à valeurs positives.
- On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leq \varphi$ puis que ψ est décroissante.

8. Commutation de U avec la dérivation.

On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mid f' \text{ bornée sur } I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1 associe sa dérivée.

- Pour f un élément de E_1 , montrer, en utilisant la question 6, que : $aU(f) = f + U(f')$.
- En déduire que, pour tout élément f de E_1 , $D(U(f)) = U(D(f))$.
- Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7c : $U(f)$ est décroissante.