Correction DM 2 - Algèbre linéaire

Exercice 1 - EDHEC ECS 2001

1. Surtout, on ne vérifie pas les 8 axiomes de la définition d'espaces vectoriels. Comme d'habitude, on vérifie si E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. L'énoncé nous donne toutes les clefs : on nous dit que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. C'est sans doute de là qu'il faut partir.
   Vérifions que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
   - On a bien $\boxed{E \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ par définition.
   - E est non vide, puisque la fonction nulle est dedans. En effet, posons :
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right. .$$
   Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f''(x) = 0$ et $(1+x^2)f(x) = 0$ donc f vérifie bien $(\star)$. Donc $\boxed{f \in E}$.
   - Soient désormais f et g dans E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $\lambda f + g \in E$. Comme $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on a déjà $\lambda f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il reste à vérifier que $\lambda f + g$ vérifie la relation $(\star)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcl} (\lambda f + g)''(x) & = & \lambda f''(x) + g''(x) \text{ (formule de dérivation)} \\ & = & \lambda(1+x^2)f(x) + (1+x^2)g(x) \text{ (car } f \text{ et } g \text{ vérifient } (\star)) \\ & = & (1+x^2)(\lambda f + g)(x). \end{array}$$
   Donc $\boxed{\lambda f + g \in E}$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est donc bien un espace vectoriel.
2. Soient u et v deux éléments de E. Vérifions que $u'v - uv'$ est une constante.
   Comme u et v sont $\mathcal{C}^2$, $u'v - uv'$ est $\mathcal{C}^1$ et donc en particulier dérivable. On a, pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{array}{rcl} (u'v - uv')'(x) & = & u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v''(x) \\ & = & u''(x)v(x) - u(x)v''(x) \\ & = & (1+x^2)u(x)v(x) - u(x)(1+x^2)v(x) \text{ (car } u \text{ et } v \text{ vérifient } (\star)) \\ & = & \boxed{0.} \end{array}$$
   Donc $u'v - uv'$ est bien constante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) f est bien $\mathcal{C}^2$ (elle est même $\mathcal{C}^\infty$) par opérations usuelles (ici composition). Il reste à vérifier que f satisfait bien la relation $(\star)$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, calculons :
   $$f'(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$
   puis :
   $$f''(x) = 1 \times \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + x \times x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x).$$
   Donc on a bien $\boxed{f \in E}$.

   (b) f ne s'annule pas (c'est une exponentielle), ainsi $t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et est même $\mathcal{C}^1$. La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$ est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$ qui s'annule en 0. Elle est donc $\mathcal{C}^2$. Ainsi g est bien $\mathcal{C}^2$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^2$.
   Il reste à vérifier que g satisfait la relation $(\star)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :
   $$g'(x) = f'(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + f(x) \times \frac{1}{(f(x))^2}.$$

Puis :
$$g''(x) = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + f'(x)\times\frac{1}{(f(x))^2} + f'(x)\times\frac{1}{(f(x))^2} + f(x)\times\frac{-2f'(x)}{(f(x))^3}.$$
On simplifie :
$$g''(x) = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + \frac{2f'(x)-2f'(x)}{(f(x))^2} = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}.$$
Puis, comme f vérifie $(\star)$, on a :
$$g''(x) = (1+x^2)f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = (1+x^2)g(x).$$

Donc g vérifie bien $(\star)$ et donc $\boxed{g \in E}$.

4. (a) Soit $h \in E$. On sait que $f \in E$. D'après le résultat de la question 2, la fonction $h'f - hf'$ est donc constante. Notons cette constante λ.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$h'(x)f(x) - h(x)f'(x) = \lambda.$$
Le premier terme ressemble à la dérivée d'une fraction. Essayons de le faire apparaître. Comme f ne s'annule jamais, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{h'(x)f(x) - h(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{\lambda}{(f(x))^2}.$$
On peut réécrire cela sous la forme :
$$\left(\frac{h}{f}\right)'(x) = \frac{\lambda}{(f(x))^2}.$$
En intégrant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{h(x)}{f(x)} = \mu + \int_0^x \frac{\lambda \mathrm{d}t}{(f(t))^2}$$
où μ est une constante réelle indépendante de x. En passant, le dénominateur de l'autre côté, on trouve finalement :
$$\boxed{h(x) = \mu f(x) + \lambda f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = \mu f(x) + \lambda g(x).}$$
Ainsi h est bien une combinaison linéaire de f et g.

(b) D'après la question précédente, (f, g) est une famille génératrice de E. Il reste à vérifier que la famille est libre (on ne peut malheureusement pas passer par les dimensions puisque la dimension de E est inconnue).
Soient λ et μ deux réels tels que :
$$\lambda f + \mu g = 0.$$
Montrons que $\lambda = \mu = 0$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0.$$
Donc en particulier pour $x = 0$, on a :
$$\lambda f(0) + \mu g(0) = 0.$$
Or $f(0) = \mathrm{e}^{\frac{0^2}{2}} = 1$ et $g(0) = f(0)\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = 0$. Donc :
$$\lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = \lambda.$$
D'où $\boxed{\lambda = 0}$.
On a donc $\mu g = 0$. Il suffit d'évaluer à un point où g est non nulle (par exemple $x = 1$) et on trouve $\boxed{\mu = 0}$.
Donc (f, g) est bien libre. Et donc (f, g) est une base de E.