

DS 2 (2022) - EXTRAIT - PROBABILITÉS DISCRÈTES

Problème 1 - Ecricome ECS 2006

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$. On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)^{\text{ème}}$ l'autre côté.

De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédent un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie I - Étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.

Exprimer l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + 1$.

En déduire que :

$$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$

Vérifier que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Exprimer l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$.

(b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.

(c) Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

Partie II - Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que $p = \frac{1}{2}$** .

On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k + 1)^{\text{ème}}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
- La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : $FFPPPPFFPPP\dots$ (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; & \quad N_3(\omega) = \dots = N_6(\omega) = 2; \\ N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; & \quad N_9(\omega) = \dots = N_{11}(\omega) = 4; \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.

On admettra que N_n est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Déterminer les lois de N_1 , N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

3. *Simulation informatique :*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ème}}$ lancer amène Pile et 0 sinon.

On rappelle qu'en langage Python, la fonction `rd.randint(2)` (lorsque le module `numpy.random` est importé comme `rd`) simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$). Compléter le programme informatique suivant pour que, m étant une valeur entière passée en paramètre, il simule les m variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m (dont les valeurs seront placées dans le tableau numpy \mathbf{X}) et détermine les valeurs de N_1, N_2, \dots, N_m (qui seront stockées dans le tableau \mathbf{N}).

```

1 import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation(m):
5   X = np.zeros(m)
   N = np.zeros(m)
   X[0] = ...
   N[0] = ...
10  for i in range(1, m):
       X[i] = ...
       ...
       ...
   return N

```

4. **Fonction génératrice de N_n .**

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k.$$

- (a) Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
 (b) Que représente $G'_n(1)$?
 (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$P([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P([N_n = k] \cap F_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}).$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).$$

- (d) Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

- (e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

Partie III - Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x on a

$$1 - x \leq e^{-x}.$$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup \dots \cup A_n.$$

- (a) Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty.$$

- (b) Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant la question III.1, que

$$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.$$

- (c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1} . Que peut-on en déduire pour $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?
 (d) Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

3. En considérant les événements A_n : « on obtient Pile au $(2n)$ ^{ème} et au $(2n+1)$ ^{ème} lancers », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.