# Correction DM 2 - Algèbre linéaire (cubes)

## Problème 1 - ESSEC ECS 2010 (partie 1)

1. **Étude de l'équation** $(E_f)$**.**

(a) Suivons l'énoncé : soit $f \in E$ et soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-ax} y(x)$.
$g$ est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$. On peut donc notamment la dériver. On a pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -a\mathrm{e}^{-ax}y(x) + \mathrm{e}^{-ax}y'(x) \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{-ax}(-ay(x) + y'(x)).} \end{aligned}$$

Montrons désormais l'équivalence par double implication :
($\Rightarrow$) On suppose $y$ solution de $(E_f)$. Alors on a pour tout $x \in I$ : $y'(x) - ay(x) + f(x) = 0$ que l'on peut réécrire :

$$-ay(x) + y'(x) = -f(x).$$

En particulier, on a :

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-ax} \times (-f(x)) = -\mathrm{e}^{-ax} f(x).$$

Donc $g$ est une primitive de $x \mapsto -\mathrm{e}^{-ax} f(x)$. Il existe donc $K \in R$ tel que :

$$\forall x \in I,\ g(x) = K + \int_1^x (-\mathrm{e}^{-at} f(t))\mathrm{d}t = \boxed{K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.}$$

où le choix de la borne inférieure de l'intégrale n'a pas d'importance sinon qu'elle soit dans $I$. On utilise donc celle proposée par l'énoncé.
Or pour tout $x \in I$, $g(x) = \mathrm{e}^{-ax} y(x)$ donc :

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{ax} g(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right).}$$

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on a :

$$y(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Vérifions que $y$ est bien solution du problème $(E_f)$.
Dans la question, il est supposé que $f$ est $\mathcal{C}^1$, donc la dérivabilité ne pose pas *a priori* problème, mais il est bon de vérifier que ça ne pose pas de problème avec la formule donnée. $y$ est un produit. Le premier terme est évidemment $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). Pour le second terme, on remarque que l'intégrande est continue donc l'intégrale avec la borne en paramètre est bien $\mathcal{C}^1$. On peut donc calculer la dérivée avec la formule du produit.
Soit $x \in I$. On a :

$$\begin{aligned} y'(x) - ay(x) + f(x) &= a\mathrm{e}^{ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right) + \mathrm{e}^{ax}\left(-\mathrm{e}^{-ax} f(x)\right) \\ &- a\mathrm{e}^{ax}\left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t\right) + f(x) \\ &= \mathrm{e}^{ax}\left(-\mathrm{e}^{-ax} f(x)\right) + f(x) \\ &= -f(x) + f(x) \\ &= \boxed{0.} \end{aligned}$$

Donc $y$ est bien solution de problème $(E_f)$.

(b) Soit $y_1$ et $y_2$ deux fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ bornées et solutions de problème $(E_f)$. Montrons que :

$$y_1 = y_2.$$

Commençons par utiliser la question précédente : puisque $y_1$ et $y_2$ sont solutions du problème, il existe $K_1$ et $K_2$ deux réels tels que pour tout $x \in I$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(x) & = & e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right) \\ y_2(x) & = & e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t)dt\right) \end{array} \right. .$$

Remarquons de plus que comme $y_1$ et $y_2$ sont bornées, leur différence $y_1 - y_2$ l'est aussi. Or pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (y_1 - y_2)(x) & = & e^{ax}\left(K_1 - \displaystyle\int_1^x e^{-at} f(t)dt\right) - e^{ax}\left(K_2 - \displaystyle\int_1^x e^{-at} f(t)dt\right) \\ & = & e^{ax}(K_1 - K_2). \end{array}$$

Mais puisque $a > 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{ax} = +\infty$$

et donc l'exponentielle n'est pas bornée. Ainsi $y_1 - y_2$ n'est bornée que si $K_1 - K_2 = 0$.
Donc $K_1 = K_2$ et donc :

$$\boxed{y_1 = y_2.}$$

(c) L'intégrale est généralisée en $+\infty$, cherchons donc de ce côté.
On va essayer de montrer une majoration et donc il nous faut des intégrales positives. Montrons donc que l'intégrale converge absolument.
Comme $f$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f(t)| \leq M$. Ainsi pour tout $t \in I$, on a :

$$|e^{at} f(t)| \leq e^{at} M.$$

Le terme de droite est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc par comparaison d'intégrale à valeurs positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} |e^{at} f(t)|dt$ converge.
On en déduit donc que $\int_1^{+\infty} e^{at} f(t)dt$ converge absolument et donc converge.

(d) On sait déjà que $g$ est une solution du problème $(E_f)$ puisque elle est de la forme trouvée à la première question avec :

$$K = \int_1^{+\infty} e^{at} f(t)dt,$$

intégrale dont la convergence a été montrée à la question précédente. De plus, on sait déjà que si la solution bornée de $(E_f)$, si elle existe, est unique.
Il suffit donc de montrer que $g$ est est bornée pour pouvoir conclure.
Notons une nouvelle fois $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I, \; |f(t)| \leq M.$$

On a alors pour tout $x \in I$ :

$$\begin{array}{rcl} |g(x)| & = & \left|e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt\right| = e^{ax}\left|\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)dt\right| \text{ (car exponentielle est positive)} \\ & \leq & e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} |e^{-at} f(t)|dt \leq e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} M dt \leq M e^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} dt. \\ & & \text{(croissance de l'intégrale)} \end{array}$$

Or, pour $A \in I$, on a :

$$\int_x^A e^{-at} dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_x^A = \underbrace{\frac{e^{-aA}}{a}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0} - \frac{e^{-ax}}{-a}.$$

Donc $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}$. D'où :

$$|g(x)| \leq M\mathrm{e}^{ax} \times \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \leq \boxed{\frac{M}{a}.}$$

Donc $g$ est bornée. On en déduit que $g$ est bien une solution bornée du problème et donc même l'unique solution bornée.

2. **Linéarité de $U$.**

(a) Avec la question précédente, on a la formule, il suffit donc de calculer. Pour $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} U(f)(x) &= \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \text{ (puisqu'on regarde } f = 1) \\ &= \mathrm{e}^{ax} \times \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} = \boxed{\frac{1}{a}.} \\ &\quad \text{(intégrale calculée dans la question précédente)} \end{aligned}$$

Donc $U(f)$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{a}$.
**Note :** si on avait eu l'intuition d'une fonction constante, on aura pu réinsérer la forme $y(x) = K$ dans l'équation $(E_f)$ et trouver la même chose puis conclure en disant que puisque la forme trouvée est bornée c'est nécessairement $U(f)$.

(b) Par définition les images de $U$ sont dans $E$ : les images de $U$ sont $\mathcal{C}^1$ donc continue et on a choisi les solutions bornées donc dans $E$.
Il suffit donc de vérifier que $U$ est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} U(\lambda f + g)(x) &= \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}(\lambda f + g)(t)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}(\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{ax}\left(\lambda\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &\quad \text{(toutes les intégrales convergent puisque } f, g \in E) \\ &= \lambda\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}g(t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda U(f)(x) + U(g)(x). \end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\boxed{U(\lambda f + g) = \lambda U(f) + U(g),}$$

c'est-à-dire $U$ est bien linéaire.

(c) Vérifions que le noyau de $U$ est réduit à zéro, c'est-à-dire que $\ker U = \{0_E\}$. Il suffit de montrer l'inclusion $\ker U \subset \{0_E\}$ puisqu'on a toujours $\{0_E\} \subset \ker U$.
Soit $f \in \ker U$. On a donc $U(f) = 0_E$. Montrons que $f = 0_E$.
On repart de la formule. On a pour tout $x \in I$ :

$$\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Or $\mathrm{e}^{ax} \neq 0$ (et même strictement positif). Donc pour tout $x \in I$ :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Rappelons que cette intégrale peut s'écrire :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t - \int_1^{x} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t.$$

Le premier terme est constante et le second est, au signe près une primitive de $t \mapsto e^{-at}f(t)$. Donc si $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt = 0$ pour tout $x$, on peut en déduire la même chose sur la dérivée de l'expression et donc pour tout $x \in I$, on a :

$$-e^{-ax}f(x) = 0.$$

Or $-e^{-ax} \neq 0$ donc pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$ c'est-à-dire :

$$\boxed{f = 0_E.}$$

Donc $U$ est bien injectif.

(d) Cette question est objectivement difficile. La formule à trouver est donnée par l'énoncé et si certes cela aide à la démonstration, je ne doute pas qu'elle est donnée pour que les candidats puissent continuer sans avoir trouvé. Je vous propose deux méthodes de résolution.

La première me semble être celle que le sujet privilégie dans sa rédaction, mais elle est calculatoire et demande de la précision.

La seconde demande un peu moins de calcul intégrale mais une excellente compréhension théorique des objets manipulés.

**Méthode 1 : par récurrence, par intégrales successives**

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in E$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n : \text{« } \forall x \in I,\ U^{n+1}(f)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)dt \text{ ».}$$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned} U^{0+1}(f)(x) &= U(f)(x) \\ &= e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt \end{aligned}$$

et :

$$e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^0}{0!} e^{-at} f(t)dt = e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt.$$

Donc $H_0$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $H_n$ est vraie. Montrons $H_{n+1}$.

On a, pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned} U^{(n+1)+1}(f)(x) &= U^{n+1}(U(f))(x) \\ &= e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} U(f)(t)dt \\ &\phantom{=}\ \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} \left( e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-as}f(s)ds \right) dt \\ &\phantom{=}\ \text{(formule de } U(f)\text{)} \\ &= \boxed{e^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \int_t^{+\infty} e^{-as}f(s)dsdt.} \end{aligned}$$

Le sujet est objectivement taquin avec nous : nous faisons une intégrale dont l'intégrande s'obtient elle-même en faisant une intégrale. Il faut donc être prudent dans nos manipulations.

Dans le produit sous la (première) intégrale, on aimerait obtenir une puissance plus grande pour le membre de gauche et on aimerait ne pas avoir d'intégrale pour le second membre. Cela nous pousse à faire une intégration par partie (IPP). Attention cela dit, les IPP ne peuvent être faites que sur des intégrales non généralisées. Intéressons-nous donc à :

$$I_B(x) = \int_x^B \frac{(t-x)^n}{n!} \int_t^{+\infty} e^{-as}f(s)dsdt$$

où $B \in I$ est la borne supérieure de l'intégrale que nous enverrons à $+\infty$ ultérieurement.
Comme tous les membres sont $\mathcal{C}^1$, on peut faire une intégration par partie. On a :

$$\begin{aligned}
I_B(x) &= \int_x^B \underbrace{\frac{(t-x)^n}{n!}}_{u'(t)} \underbrace{\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s}_{v(t)} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[ \underbrace{\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \underbrace{\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s}_{v(t)} \right]_x^B - \int_x^B \underbrace{\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-at} f(t)\right)}_{v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s - \underbrace{\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=0} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_x^B \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \boxed{\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s + \int_x^B \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend exactement vers ce qu'on cherche. Il faut tout de même remarquer ici que l'intégrale est effectivement convergente (en fait absolument). En effet, si on note $|f| \leq M$, on a :

$$\left| \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-at} f(t) \right| \leq M \frac{|t-x|^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-at} = o_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{-at}{2}}\right).$$

Donc l'intégrale est bien convergente lorsque $B \to +\infty$.
Il reste donc à montrer que le premier terme tend bien vers 0 lorsque $B \to +\infty$. On peut commencer par constater que $\int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{as} f(s)\mathrm{d}s$ est le reste d'une intégrale convergente et donc tend vers 0. Mais le terme devant tend quant à lui vers $+\infty$, c'est donc une forme indéterminée. Il va falloir être plus fin.
On sait que $f$ est bornée. Donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s \right| &= \frac{|B-x|^{n+1}}{(n+1)!} \left| \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \frac{|B-x|^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-as} f(s)\right| \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{|B-x|^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} M \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{|B-x|^{n+1}}{(n+1)!} M \times \left( -\frac{\mathrm{e}^{-aB}}{-a} \right) \\
&\leq M \frac{|B-x|^{n+1} \mathrm{e}^{-aB}}{a(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Or par croissance comparée, on a :

$$\lim_{B\to+\infty} |B-x|^{n+1} \mathrm{e}^{-aB} = 0.$$

Donc par théorème de comparaison :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!} \int_B^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} f(s)\mathrm{d}s = 0.$$

D'où :

$$\lim_{B\to+\infty} I_B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\boxed{U^{(n+1)+1}(f)(x) = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{-as}f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t.}$$

c'est-à-dire $H_{n+1}$ est vraie.
Donc par récurrence sur $n$, on a la formule démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Méthode 2 : en s'appuyant sur l'unicité de la solution bornée**

Pour cette seconde méthode, on ne cherche pas à calculer des intégrale jusqu'à trouver la bonne formule. On va plutôt chercher à montrer que la formule donnée est bien la solution du problème.
Mais de quel problème parle-t-on ? Et bien le sujet pousse plutôt à la méthode 1. Mais on peut remarque que si certes $U^n = U^{n-1}\circ U$, on a aussi $U^n = U \circ U^{n-1}$. C'est-à-dire que si $f \in E$ alors :

$$U^n(f) = U(U^{n-1}(f))$$

c'est-à-dire que $U^n(f)$ est l'unique solution bornée du problème $E_{U^{n-1}(f)}$.
Comme cette solution est unique, il nous suffit de vérifier que la formule donnée est bien solution de $E_{U^{n-1}(f)}$ et qu'elle est bornée.
Notons pour tout $x \in I$.

$$g_n(x) = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme dans la première méthode, on remarque que l'intégrale est convergente puisque pour $|f| \leq M$, on a :

$$\left|\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\right| \leq M\frac{|t-x|^n}{n!}\mathrm{e}^{-at} = o_{t\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{-at}{2}}\right).$$

Donc l'intégrale est bien convergente en $+\infty$.

**Montrons que $g_n$ est bornée pour tout $n$.**

Nous allons avoir besoin d'un lemme (dont l'utilité est évidente si on travaille d'abord au brouillon).
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P_n : « \forall x \in I, \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a} »$$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a :

$$\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax}\times\left(-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}\right) = \frac{1}{a}.$$

  Donc $P_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P_n$ vraie. Montrons $P_{n+1}$.
  Soit $x \in I$. Soit également $B \in \mathbb{R}$ un réel que nous ferons tendre vers l'infini plus tard. On a :

$$\begin{aligned}\int_x^B \underbrace{\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{v'(x)}\mathrm{d}t &= \left[\underbrace{\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(x)}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{v(x)}\right]_x^B - \int_x^B\underbrace{\frac{(t-x)^n}{n!}}_{u'(x)}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{v(x)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-aB}}{-a} - \underbrace{\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=0}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a} + \int_x^B\frac{(t-x)^n}{n!}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre $B$ vers l'infini, on a :

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t &= \lim_{B\to+\infty} \int_x^{B} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{B\to+\infty} \left( \underbrace{\frac{(B-x)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-aB}}{-a}}_{\to 0 \text{ (croissance comparée)}} + \int_x^{B} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\mathrm{d}t \right) \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\frac{\mathrm{e}^{-at}}{a}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}. \text{ (hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$, c'est-à-dire $P_{n+1}$ est vraie.

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}}$$

Comme $f$ est bornée, notons $M$ un majorant de $|f|$. On a alors pour tout $x \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &= \left| \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \left| \frac{(t-x)^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-at}f(t) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-at}M\mathrm{d}t \\
&\leq M\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n}}{n!}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \\
&\leq \boxed{\frac{M}{a}}.
\end{aligned}$$

Donc $g_n$ est bornée sur $I$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

**Vérifions désormais le résultat : que $g_n$ est la solution bornée de $E_{U^n(f)}$.**

On va avoir besoin d'une récurrence pour pouvoir manipuler une expression de $U^n(f)$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$H_n : \text{« } g_n \text{ est la solution bornée de } E_{U^n(f)} \text{ »}$$

- **Initialisation :** Le cas de $H_0$ est le cas traité dans les questions précédentes. Donc $H_0$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $g_n$ est solution de $(E_{U^n(f)})$. Montrons que $g_{n+1}$ est solution de $(E_{U^{n+1}(f)})$.

  On va vouloir vérifier à la main que $g_{n+1}$ vérifie l'équation $(E_{U^n(f)})$. Il va donc falloir dériver $g_{n+1}$.

  **Attention !** On ne peut pas dire que l'intégrale est dérivable sur la base de l'argument que la variable est dans sa borne. En effet, l'intégrande elle-même dépend de la variable $x$. Pour justifier que $g_{n+1}$ est dérivable, il va falloir être un peu plus astucieux.

  Notons pour tout $m$, $h_m : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^m}{m!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t$. On a donc $g_n(x) = \mathrm{e}^{ax}h_n(x)$ et $g_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{ax}h_{n+1}(x)$. Montrons que $h_{n+1}$ est $\mathcal{C}^1$. Pour cela remarquons que pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}t^k(-x)^{n+1-k}\right)\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où on a utilisé le binôme de Newton. On peut séparer l'intégrale en plusieurs morceaux :

$$h_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}\binom{n+1}{k}(-x)^{n+1-k}\int_x^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

Cette opération est possible puisque toutes les intégrales convergent individuellement (pour des raisons similaire aux précédentes fois puisque $t^k\mathrm{e}^{-at/2} \to 0$ et $f$ est bornée). Cette formule est désormais $\mathcal{C}^1$ comme somme et produit de termes $\mathcal{C}^1$. On a pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} h'_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}\binom{n+1}{k}(-1)(n+1-k)(-x)^{n+1-k-1}\int_x^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t \\ &- \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\binom{n+1}{k}(-x)^{n+1-k-1}x^k\mathrm{e}^{-ax}f(x). \end{aligned}$$

On a regroupé dans la première somme la dérivée des puissances de $x$ et dans la seconde les dérivées des intégrales dont l'intégrande ne fait plus apparaître $x$. Remarquons que :

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k}(n+1-k) &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}(n+1-k) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k-1)} \text{ (pour } k \neq n+1) \\ &= (n+1)\binom{n}{k} \end{aligned}$$

si $k \neq n+1$ (pour éviter la simplification par 0) mais reste vrai si $k = n+1$ (par vérification directe). On peut alors nettoyer un peu l'expression de $h'_{n+1}(x)$ :

$$\begin{aligned} \boxed{h'_{n+1}(x)} &= \sum_{k=0}^{n}(n+1)\frac{1}{(n+1)!}\binom{n}{k}(-1)(-x)^{n-k}\int_x^{+\infty}t^k\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}x^n\mathrm{e}^{-ax}f(x). \\ &\quad \text{(la première somme ne va que jusqu'à } n \text{ car pour } n+1\text{, le terme vaut 0)} \\ &= -\frac{1}{n!}\int_x^{+\infty}(t-x)^n\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{(n+1)!}(1-1)^{n+1}xn\mathrm{e}^{-ax}f(x) \\ &= \boxed{-h_n(x)}. \end{aligned}$$

$g_{n+1}$ est donc $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^1$ et on a pour tout $x \in I$ :

$$g'_{n+1}(x) = a\mathrm{e}^{ax}h_{n+1}(x) - \mathrm{e}^{ax}h_n(x).$$

Donc, on a pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} & g'_{n+1}(x) - ag_{n+1}(x) + U^{n+1}(f)(x) \\ =\ & a\mathrm{e}^{ax}h_{n+1}(x) - \mathrm{e}^{ax}h_n(x) - a\mathrm{e}^{ax}h_{n+1}(x) + U(U^n(f))(x) \\ =\ & -\mathrm{e}^{ax}h_n(x) + \mathrm{e}^{ax}h_n(x) \\ & \text{(on a exprimé } U^{n+1}(f)(x) \text{ via l'hypothèse de récurrence)} \\ =\ & \boxed{0.} \end{aligned}$$

Donc $g_{n+1}$ est solution du problème $(E_{U^{n+1}(f)})$.

Comme $g_{n+1}$ est bornée, $g_{n+1}$ est donc l'unique solution bornée de $(E_{U^{n+1}(f)})$. Et donc $H_{n+1}$ est vraie.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n$ est l'unique solution bornée de $(E_{U^n(f)})$. Donc $g_n = U(U^n(f))$ c'est-à-dire $\boxed{g_n = U^{n+1}(f)}$. On peut le réécrire dans les termes de l'énoncé avec pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$ :

$$\boxed{U^{n+1}(f) = \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.}$$

3. **Cas des fonctions exponentielles.**

(a) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Notons $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$. $f$ est bien bornée sur $I$, on a donc l'expression pour $x \in I$ de $U(f)(x)$ suivante :

$$U(f)(x) = \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax} \times \left( -\frac{\mathrm{e}^{-(a+k)x}}{-(a+k)} \right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-kx}}{a+k}.}$$

On a donc :

$$\boxed{U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k.}$$

(b) Soit $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$. Cherchons une fonction non nulle $f$ telle que $U(f) - \lambda f = 0_E$. Cela prouvera $\ker(U - \lambda \mathrm{id}_E) \not\subset \{0\}$ et donc $\ker(U - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$ (l'inclusion réciproque est toujours vraie et donc on ne cherche pas à démontrer qu'elle est fausse).

Les $f_k$ sont de bons candidats. On voit dans la question précédente que $U(f_k) = \frac{1}{a+k} f_k$. Cherchons donc $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\frac{1}{a+k} = \lambda$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\frac{1}{a+k} = \lambda \Leftrightarrow a+k = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{\lambda} - a.}$$

Comme $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, on a :

$$\frac{1}{\lambda} - a \in [0, +\infty[\,.$$

On peut donc poser $k = \frac{1}{\lambda} - a$. Et $\boxed{f_{\frac{1}{\lambda} - a}}$ est une fonction non nulle de $\ker(U - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Et donc $\boxed{\ker(U - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}}$.

(c) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Montrons par récurrence que $U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$H_n : « \ U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k \ »$$

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a :

$$U^0(f_k) = f_k = \frac{1}{(a+k)^0} f_k.$$

Donc $H_0$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $H_n$ vraie. Montrons $H_{n+1}$.

Calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{U^{n+1}(f_k)} &= U^n(U(f_k)) = U^n\left(\frac{1}{a+k} f_k\right) \text{ (calcul de } U(f_k) \text{ de la première question)} \\ &= \frac{1}{a+k} U^n(f_k) \\ &\quad \text{(linéarité de } U^n) \\ &= \frac{1}{a+k} \times \frac{1}{(a+k)^n} f_k = \boxed{\frac{1}{(a+k)^{n+1}} f_k.} \\ &\quad \text{(hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

On a bien $H_{n+1}$.

Ainsi, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $n$ :

$$\boxed{U^n(f_k) = \frac{1}{(a+k)^n} f_k.}$$

**Note :** Dans le fond, $U^n(f_k)$ est une suite géométrique de fonctions. Mais bon, en ECG, le programme ne parle de suites que pour les réelles et à la marge pour les matrices. Donc on refait la récurrence.

4. **Cas des fonctions sinus et cosinus.**

(a) Commençons avec $U(\sin)$. Soit $x \in I$, pour $a = 1$, on a :

$$U(\sin)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t.$$

Il nous faut donc calculer $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t$ qui est un grand classique à savoir faire. On va procéder par intégration par partie.
Soit $A \in I$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_x^A \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \mathrm{d}t &= \Big[ \underbrace{-\mathrm{e}^{-t}}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \Big]_x^A - \int_x^A \underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-A} \sin(A) + \mathrm{e}^{-x} \sin(x) + \int_x^A \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{w'(t)} \underbrace{\cos(t)}_{z(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-A} \sin(A) + \mathrm{e}^{-x} \sin(x) + \Big[ \underbrace{-\mathrm{e}^{-t}}_{w(t)} \underbrace{\cos(t)}_{z(t)} \Big]_x^A - \int_x^A \underbrace{(-\mathrm{e}^{-t})}_{w(t)} \underbrace{(-\sin(t))}_{z'(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-A} \sin(A) + \mathrm{e}^{-x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-A} \cos(A) + \mathrm{e}^{-x} \cos(x) - \int_x^A \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{e}^{-A}(\sin(A) + \cos(A)) + \mathrm{e}^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) - \int_x^A \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Donc :

$$2 \int_x^A \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-A}(\sin(A) + \cos(A)) + \mathrm{e}^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_x^A \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{e}^{-A}(\sin(A) + \cos(A)) + \mathrm{e}^{-x}(\sin(x) + \cos(x))}{2}.}$$

Or :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_x^A \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t$$

puisque l'intégrale converge. Et comme $A \mapsto \sin(A) + \cos(A)$ est bornée (par 2 et $-2$ par exemple), on a :

$$\lim_{A \to +\infty} -\mathrm{e}^{-A}(\sin(A) + \cos(A)) = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t) \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\sin(x) + \cos(x)).}$$

Donc :

$$U(\sin)(x) = \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}(\sin(x) + \cos(x)) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2}.}$$

On calcule de même :

$$\boxed{U(\cos) = \frac{-\sin + \cos}{2}.}$$

(b) Montrons que $P$ est stable par $U$. Soit $h \in P$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $h = \lambda \sin + \mu \cos$. Montrons que $U(h) \in P$.
On a :

$$\begin{aligned} U(h) &= U(\lambda \sin + \mu \cos) = \lambda U(\sin) + \mu U(\cos) \text{ (linéarité de } U) \\ &= \frac{\lambda}{2}(\sin + \cos) + \frac{\mu}{2}(-\sin + \cos) = \frac{\lambda - \mu}{2} \sin + \frac{\lambda + \mu}{2} \cos . \end{aligned}$$

Et donc $U(h) \in P$.
De plus, $P$ est engendré par sin et cos donc clairement $(\sin, \cos)$ est une famille génératrice de $P$. Il reste à prouver qu'elle est libre pour vérifier que $(\sin, \cos)$ en est une base.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \sin + \mu \cos = 0$. En évaluant le terme de gauche en $x = 0$, on trouve :

$$\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu.$$

Donc $\boxed{\mu = 0}$. Puis en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on trouve :

$$\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda.$$

Donc $\boxed{\lambda = 0}$. Donc la famille est libre et forme ainsi une base de $P$.
Puisque :

$$U(\sin) = \frac{\sin + \cos}{2} \quad \text{et} \quad U(\cos) = \frac{-\sin + \cos}{2},$$

on a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(\sin,\cos)}(U|_P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Calculons :

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite :

$$M^3 = M^2 \times M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Et on a enfin [1] :

$$M^4 = M^3 \times M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}I_2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $n = 4k + r$ la division euclidienne de $n$ par 4 avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, 3]\!]$. On a :

$$\boxed{M^n = M^{4k+r} = (M^4)^k M^r = \frac{1}{(-4)^k} M^r.}$$

Comme les coefficients dans $M^r$ son bornées (c'est une liste finie), la limite des coefficients de $M^n$ est donnée par la limite de $\frac{1}{(-4)^k}$, c'est-à-dire 0.

5. **Une autre famille de fonctions**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculons $\psi_n$. Pour $x \in I$, on a :

$$\psi_n(x) = U(\varphi_n)(x) = \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-t}t^n \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+1)t}t^n \mathrm{d}t.$$

1. On peut aussi faire $M^4 = (M^2)^2$.

Le but est d'obtenir une expression fonction de $\psi_{n-1}$ c'est-à-dire avec une puissance plus faible pour $t$. Cela pousse à faire une intégration par partie.
Pour $A \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_x^A \underbrace{\mathrm{e}^{-(a+1)t}}_{u'(t)} \underbrace{t^n}_{v(t)} \mathrm{d}t &= \left[ \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)t}}{-(a+1)}}_{u(t)} \underbrace{t^n}_{v(t)} \right]_x^A - \int_x^A \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)t}}{-(a+1)}}_{u(t)} \underbrace{nt^{n-1}}_{v'(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)A}}{a+1}A^n + \frac{\mathrm{e}^{-(a+1)x}}{a+1}x^n + \frac{n}{a+1}\int_x^A \mathrm{e}^{-(a+1)t}t^{n-1}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)A}}{a+1}A^n + \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a+1}\varphi_n(x) + \frac{n}{a+1}\int_x^A \mathrm{e}^{-at}\varphi_{n-1}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(a+1)A}}{a+1}A^n = 0.$$

Comme les deux intégrales convergent, on a donc :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+1)t}t^n\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a+1}\varphi_n(x) + \frac{n}{a+1}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi_{n-1}(t)\mathrm{d}t.}$$

Ainsi :

$$\psi_n(x) = \mathrm{e}^{ax}\left(\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a+1}\varphi_n(x) + \frac{n}{a+1}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi_{n-1}(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{\varphi_n(x)}{a+1} + \frac{n}{a+1}\psi_{n-1}(x).$$

Et donc :

$$\boxed{\psi_n = \frac{1}{a+1}\varphi_n + \frac{n}{a+1}\psi_{n-1}.}$$

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons :

$H_p$ : « $F_0$,..., $F_p$ sont stables par $U$ et admettent pour bases $(\varphi_0)$, ..., $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$. »

Montrons $H_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- **Initialisation :** Pour $p = 0$, $\varphi_0$ étant non nul, la famille $(\varphi_0)$ est libre et étant génératrice de $F_0$, elle est bien une base.
  De plus, on a pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned}
U(\varphi_0)(x) &= \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+1)t}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{ax} \times \left(-\frac{\mathrm{e}^{-(a+1)x}}{-(a+1)}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+1} = \frac{\varphi_0(x)}{a+1}.
\end{aligned}$$

  Donc $U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0 \in F_0$ et la propriété est bien initialisée.
- **Hérédité :** Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $H_p$ vraie. Montrons $H_{p+1}$.
  Il suffit de se concentrer sur la stabilité de $F_{p+1}$ et de montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p+1})$ en est une base.
  Montrons d'abord que $F_{p+1}$ est stable par $U$. Soit $h \in F_{p+1}$ et montrons que $U(h) \in F_{p+1}$.
  Il existe ainsi $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$h = \lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_{p+1}\varphi_{p+1}.$$

  On a :

$$\begin{aligned}
U(h) &= U(\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_{p+1}\varphi_{p+1}) \\
&= \lambda_0U(\varphi_0) + \lambda_1U(\varphi_1) + \dots + \lambda_{p+1}U(\varphi_{p+1}) \\
&= \lambda_0U(\varphi_0) + \lambda_1U(\varphi_1) + \dots + \lambda_{p+1}\left(\frac{1}{a+1}\varphi_p + \frac{p}{a+1}U(\varphi_p)\right).
\end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence on a $U(\varphi_i) \in F_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$. Comme $F_i \subset F_{p+1}$, on a donc $U(\varphi_i) \in F_{p+1}$. D'où :

$$\boxed{U(h) \in F_{p+1}.}$$

Montrons désormais que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p+1})$ est une base de $F_{p+1}$. C'est clairement une famille génératrice. Il suffit donc d'en montrer le caractère libre.
Soit $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+2}$ tel que :

$$\mu_0\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 + \ldots + \mu_{p+1}\varphi_{p+1} = 0.$$

Pour tout $x \in I$, on a donc : $\mu_0 \mathrm{e}^{-x} + \mu_1 \mathrm{e}^{-x} x + \ldots + \mu_{p+1} \mathrm{e}^{-x} x^{p+1} = 0$.
On en déduit en multipliant par $\mathrm{e}^x$ que pour tout $x \in I$ :

$$\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_{p+1} x^{p+1} = 0.$$

$\mu_0 + \mu_1 X + \cdots \mu_{p+1} X^{p+1}$ est donc le polynôme nul et donc :

$$\boxed{\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_{p+1}.}$$

Ainsi la famille est libre et est donc une base de $F_{p+1}$.
D'où $H_{p+1}$ est donc vraie.

Ainsi $F_p$ est stable pour tout $p$ par $U$ et $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ en est une base.

(c) On a déjà calculé que :

$$\boxed{U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0.}$$

De plus, on a :

$$\boxed{U(\varphi_1) = \psi_1 = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{a+1}\psi_0 = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{(a+1)^2}\varphi_0.}$$

Et enfin :

$$\boxed{U(\varphi_2) = \psi_2 = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1}\psi_1 = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1}U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{(a+1)^2}\varphi_1 + \frac{2}{(a+1)^3}\varphi_0.}$$

On en déduit que :

$$\boxed{T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & \frac{1}{1+a} & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix}.}$$

Pour calculer les puissances de $T_2$, on remarque que $T_2 = \frac{1}{1+a} I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est nilpotente ($N^3 = 0$). Or l'identité commute avec toutes les matrices, donc en particulier $I_3$ et $N$ commutent. On peut donc appliquer le binôme de Newton. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
T_2^n &= \left(\frac{1}{1+a}I_3 + N\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{1+a}I_3\right)^{n-k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{1+a}I_3\right)^{n-k} N^k = \left(\frac{1}{1+a}I_3\right)^n + n\left(\frac{1}{1+a}I_3\right)^{n-1} N + \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{1+a}I_3\right)^{n-2} N^2 \\
&\quad \text{(car } N^k = 0 \text{ si } k \geq 3\text{)} \\
&= \frac{1}{(1+a)^{n-2}}\left(\frac{1}{(1+a)^2}I_3 + \frac{n}{a+1}N + \frac{n(n+1)}{2}N^2\right).
\end{aligned}$$

Comme $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} T_2^n &= \frac{1}{(1+a)^{n-2}}\left(\frac{1}{(1+a)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{a+1}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n+1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{(1+a)^4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+a)^n} & \frac{n}{(1+a)^{n+1}} & \frac{n(n+1)}{(1+a)^{n+2}} \\ 0 & \frac{1}{(1+a)^n} & \frac{2n}{(1+a)^{n+1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+a)^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On traite encore les cas $n \in [\![0, 1]\!]$ :

$$T_2^0 = I_2 \quad \text{et} \quad T_2^1 = T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & \frac{1}{(1+a)^2} & \frac{2}{(1+a)^3} \\ 0 & \frac{1}{1+a} & \frac{2}{(1+a)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix}.$$

On remarque que la formule précédente s'applique encore et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{T_2^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+a)^n} & \frac{n}{(1+a)^{n+1}} & \frac{n(n+1)}{(1+a)^{n+2}} \\ 0 & \frac{1}{(1+a)^n} & \frac{2n}{(1+a)^{n+1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+a)^n} \end{pmatrix}.}$$

Et donc encore une fois les coefficients de $T_2^n$ tendent tous vers 0.

6. **Une autre expression de $U(f)$.**
On sait déjà que pour $f \in E$ et $x \in I$, on a :

$$U(f)(x) = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour $x \in I$ fixé, procédons au changement de variable $t = x+u$. On a alors $u = t-x$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. L'application $t \mapsto t - x$ est bien $\mathcal{C}^1$ (elle est affine), strictement mononotone (en l'occurence croissante) et on a :

$$\lim_{t\to x} t - x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} t - x = +\infty.$$

Donc les intégrales :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(x+u)} f(x+u)\mathrm{d}u$$

ont même nature. En l'occurence, elles sont toutes deux convergentes (puisqu'on sait que la première l'est). Et donc on a l'égalité :

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(x+u)} f(x+u)\mathrm{d}u.}$$

On replace cette expression dans $U(f)(x)$ :

$$\begin{aligned} U(f)(x) &= \mathrm{e}^{ax}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a(x+u)} f(x+u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{ax}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-au} f(x+u)\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-ax}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au} f(x+u)\mathrm{d}u \\ &= \boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t.} \text{ (changement de nom pour la variable d'intégration)} \end{aligned}$$

7. **Positivité de $U$.**

(a) Soit $f \in E$. Comme $f$ est bornée, $|f|$ aussi. Et comme $f$ est continue, $|f|$ aussi (car $x \mapsto |x|$ est continue). Donc $|f| \in E$. Donc $U(|f|)$ est bien défini.
On a de plus pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned}
|U(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\mathrm{e}^{-at} f(x+t)\right| \mathrm{d}t \\
&\quad \text{(inégalité triangulaire pour l'intégrale)} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}|f(x+t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}|f|(x+t)\mathrm{d}t \\
&\leq U(|f|)(x).
\end{aligned}$$

(b) Soit $\varphi$ une fonction de $E$ positive. Soit $x \in I$. On a :

$$\mathrm{e}^{-at} \times 0 \leq \mathrm{e}^{-at} f(x+t).$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \times 0\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t$$

où les deux intégrales existent puisque $f \in E$ et la fonction nulle appartient à $E$ aussi. Or :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} \times 0\mathrm{d}t = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\mathrm{d}t \geq 0}$$

c'est-à-dire que $\psi$ est à valeurs positives.

(c) Soit $x \in I$. Calculons $a\psi(x)$ pour $\varphi$ décroissante :

$$\begin{aligned}
a\psi(x) &= aU(\varphi)(x) \\
&= a\mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi$ est décroissante, on a pour tout $t \in [x, +\infty[$ :

$$\varphi(t) \leq \varphi(x).$$

Par croissance d'intégrale (et puisque $a\mathrm{e}^{ax} \geq 0$), on a :

$$\begin{aligned}
a\psi(x) &= a\mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi(t)\mathrm{d}t \\
&\leq a\mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi(x)\mathrm{d}t \\
&\leq a\mathrm{e}^{ax}\varphi(x) \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \\
&\leq a\mathrm{e}^{ax}\varphi(x)\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \\
&\leq \varphi(x).
\end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{a\psi \leq \varphi}$ .

Montrons désormais que $\psi$ est décroissante. $\psi$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a pour $x \in I$ :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= a\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\varphi(t)\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-ax}\varphi(x)\\ &= a\psi(x) - \varphi(x)\\ &\leq 0. \text{ (d'après l'inégalité précédente)}\end{aligned}$$

Donc $\psi$ est bien décroissante sur l'intervalle $I$.

8. **Commutation de $U$ avec la dérivation.**

(a) Soit $f \in E_1$. On a pour $x \in I$ :

$$aU(f)(x) = a\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(x+t)\mathrm{d}t.$$

On va procéder par intégration par partie pour faire apparaître $f'$. Soit $A \in I$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^A \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{u'(t)}\underbrace{f(x+t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{u(t)}\underbrace{f(x+t)}_{v(t)}\right]_0^A - \int_0^A \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{u(t)}\underbrace{f'(x+t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-aA}}{a}f(x+a) + \frac{f(x)}{a} + \frac{1}{a}\int_0^A \mathrm{e}^{-at}f'(x+t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $f$ est bornée, on a :

$$\lim_{A\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-aA}}{a}f(x+a) = 0.$$

Et comme $f'$ est bornée, on a :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-at}f'(x+t)\mathrm{d}t = U(f')(x).$$

Donc :

$$\boxed{aU(f)(x) = a\left(\frac{f(x)}{a} + \frac{1}{a}U(f')(x)\right) = f(x) + U(f')(x).}$$

(b) Soit $f \in E_1$. Soit $x \in I$. On a :

$$U(f)(x) = \mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $U(f)$ est dérivable comme produit et :

$$U(f)'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{ax}\mathrm{e}^{-ax}f(x) = aU(f)(x) - f(x).$$

D'où :

$$\boxed{D(U(f)) = aU(f) - f = f + U(f') - f = U(D(f)).}$$

(c) Comme $f \in E_1$, on a $D(U(f)) = U(D(f))$ c'est-à-dire $U(f)' = U(f')$. Or $f$ est décroissante donc $f'$ est négative. D'où $U(f)' = -D(-f')$ avec $-f'$ positive. D'après une question précédente, on a alors $D(-f') \geq 0$ c'est-à-dire $U(f)' \leq 0$. Donc $U(f)$ est décroissante.