DS 2 - Probabilités discrètes, algèbre linéaire

Vendredi 20/10/2023 - 4h

Calculatrice interdite

1. Les exercices sont indépendants.
2. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
3. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
4. Encadrez ou soulignez vos résultats.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques `Python` *sont importées comme suit :*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - Ecricome ECS 2010

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\mathrm{d}u.$$

1. **Convergence de la suite** $(u_n)_{n\geqslant 1}$**.**
   (a) Vérifier que : $\forall n \geqslant 1,\ \forall t \in [0,1[,\ \dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$.
   En déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?
   (b) En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$.
2. **Résultats intermédiaires.**
   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1}$.
   (b) Soit k un entier naturel non nul. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\mathrm{d}x$.
   (c) On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que : $\forall x \in]-\infty, 0],\ |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + x| \leqslant \frac{3x^2}{2}$.
3. **Application**
   (a) En utilisant la question 2, démontrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \left| v_n + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u \right| \leqslant \dfrac{3}{2n^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\mathrm{d}u$.
   (b) On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u$ **que l'on ne cherchera pas à calculer.**
   Donner un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \frac{1}{2}$ en fonction de I.

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2008

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

3. **Étude de la dérivabilité de F.**
   (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi(t) = \frac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n, +\infty[^2$,
   $$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$
   (b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}_+$,
   $$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.$$
   (d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = G$.
4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$.
   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$.
   (c) En déduire que : $\ln(1 + x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1 + x)$.
   (d) Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 - EDHEC ECS 2016

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - \mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Déterminer $(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f)$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (f - \mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)$.
   (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : $f \circ (f - \mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) = 0$.
   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1$.
   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$) et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
   Indication : *on dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque, pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$, on a $a_0 + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_pf^p = 0$.*
   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \ldots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1X + \cdots + a_pX^p$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux précédentes ?

Problème 4 - Ecricome ECS 2018

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I - Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\boxed{P(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star,\ P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k - 1).}$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$ et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = \dfrac{b^k}{k!} P(N = 0)$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b. Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que : $\forall k \geq 2,\ P(N = k) = 0$.
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z = k) = \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times P(Z = k-1)$.
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.
4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $P(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} kP(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)P(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N = k).$$
   (c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N = k)\right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.
   (d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que : $E(N^2) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$.
   (e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur $V(N)$ en fonction de a et b.
   (f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie II - Fonction génératrice

On notera dans la suite : $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N = k)$, où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum_{k \geq 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :
$$\forall x \in [0, 1],\ G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) x^k$$
et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$. On note enfin f la fonction définie par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = p_0(1 - ax)^\alpha$.

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\forall x \in [0, 1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1 - ax)^{\alpha - k}$.
7. Soit $x \in [0, 1]$.
   (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1} \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}(x - t)^n \mathrm{d}t$.
   (b) Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}(x - t)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} \mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que : $G(x) = p_0(1 - ax)^\alpha$. En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Partie III - Formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie I.

On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

autrement dit : $\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$ et $S(\omega) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$ sinon.

8. Calculer $P(S = 0)$ lorsque $a \in]0, 1[$ à l'aide de la partie II.
9. (a) Calculer $P(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   (b) On considère le fonction `Python` suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```python
def simulX(n):
  y = 0
  for i in range(1,n+1):
    if rd.random() < 1/2:
      y = y+1
  return  y
```

   Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

   (c) On rappelle que la fonction `rd.poisson(1/mu)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `mu`. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre μ et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

   Recopier et compléter la fonction `Python` suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```python
def simulS(mu,n):
  N = rd.poisson(1/mu)
  ......................
  ......................
  ......................
  ......................
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours : $\forall k \geq 0,\ p_k = P(N = k)$ et on notera également : $\forall k \geq 0,\ q_k = P(X_1 = k)$. Enfin, on considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

    (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ E(X_i|S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}$.

    Indication : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1} = k)$.

    (b) Justifier que :$\forall j \in [\![0, k]\!],\ P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j)$.

    Pour les carrés : on pourra admettre au besoin que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

    (c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

    (a) Montrer que : $\forall j \in [\![0, k]\!],\ P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j)$.

    (b) Montrer que : $\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k)$.

    (c) Justifier que : $P(S = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k)$.

    (d) En déduire finalement que : $P(S = k) = \frac{1}{1-aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j)$.