CORRECTION DS 2 - PROBABILITÉS DISCRÈTES, ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1 - Ecricome ECS 2010

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

(a) Pour $n \geqslant 1$ et $t \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) &= \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - \frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \\
&= \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - \frac{1-t+t-t^2+t^2-t^3+\cdots+t^{n-1}-t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \\
&= \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - \frac{1-t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \\
&= \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Puis en multipliant au numérateur et dénominateur par $(1-t)$:

$$\boxed{\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})} = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.}$$

Or pour $t \in [0,1[$, $t > t^n$. Donc $1-t < 1-t^n$ puis $\frac{1-t}{1-t^n} < 1$. Pour $t \in [0,1[$, on a donc $0 \leqslant \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) \leqslant t^n$. Par croissance de l'intégrale (sur un segment), on obtient :

$$\int_0^1 0\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $0 \leqslant u_n - \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 \leqslant \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ que l'on peut enfin écrire :

$$\boxed{0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

Par encadrement, on a $u_n - 1/2$ tend vers 0 et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

(b) On pose l'application φ définie sur $[0,1[$ par $\varphi(t) = t^n$. φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur cet intervalle. On peut donc faire un changement de variable.
On a $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = \varphi(0) = 0$ et $\lim_{t\to 1^-} = 1$. En posant $u = t^n$, on a $\mathrm{d}u = nt^{n-1}\mathrm{d}t$.
Donc les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{(t^n)^{1/n} - (t^n)^{2/n}}{1-t^n} nt^{n-1}\mathrm{d}t.$$

Or pour $t \in [0,1[$, on a :

$$\frac{(t^n)^{1/n} - (t^n)^{2/n}}{1-t^n} nt^{n-1} = n\frac{t-t^2}{1-t^n}t^{n-1} = n\frac{t^n(1-t)}{1-t^n} = n\left(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\right).$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{(t^n)^{1/n}-(t^n)^{2/n}}{1-t^n} nt^{n-1}\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 1 et donc est convergente. D'où les deux intégrales sont convergentes et :

$$v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}\mathrm{d}u = n\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\mathrm{d}t - n\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = nu_n - \frac{n}{2}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.}$$

2. **Résultats intermédiaires.**

(a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, et $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{(\ln x)^k}{x-1} = \frac{(\ln(1+(x-1)))^k}{x-1}$$

et donc $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(\ln(1+u))^k}{u}$. Or : $\frac{(\ln(1+u))^k}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^k}{u} \underset{u\to 0}{\sim} u^{k-1}$. Comme $k \geqslant 1$, on a $k-1 \geqslant 0$ et ainsi $u^{k-1} \to 0$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = 0.}$$

(b) L'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1} \mathrm{d}x$ est *a priori* généralisée en 0 et en 1. La question précédente montre que $x \mapsto \frac{(\ln x)^k}{x-1}$ est polongeable par continuité en 1. Ainsi l'intégrale est faussement impropre en 1.
En 0, on a :

$$\sqrt{x}\frac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}(\ln(x))^k \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

par croissance comparée. On a donc $\frac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann).
Donc, par domination, $\boxed{\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\mathrm{d}x \text{ converge}}$ (et même absolument).

(c) f est $\mathcal{C}^2$ (par opérations usuelles) sur $\mathbb{R}$ et on a donc pour $x \in]-\infty, 0]$:

$$|f(x) - f(0) - (x-0)f'(0)| \leqslant \frac{M(x-0)^2}{2}$$

où M est un majorant de $|f''|$ sur $[x, 0]$.
Or pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x(1-4\mathrm{e}^x)$.
Sur $\mathbb{R}_-$, on a $0 < \mathrm{e}^x \leqslant 1$. Et donc $1 > 1 - 4\mathrm{e}^x \geqslant -3$. D'où : $|f''(x)| \leqslant 3$.
Et donc :

$$\boxed{|\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + x| \leqslant \frac{3x^2}{2}.}$$

3. **Application**

(a) Calculons $\left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u\right|$. Commençons par remarquer que les intégrales sont bien convergentes. On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u\right| &= \left|\int_0^1 \frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u}\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\mathrm{d}u\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(\frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n}\frac{\ln u}{1-u}\right)\mathrm{d}u\right| \\
&\quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\frac{u^{1/n} - u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n}\frac{\ln u}{1-u}\right|\mathrm{d}u \\
&\quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{\frac{\ln u}{n}} - \mathrm{e}^{2\frac{\ln u}{n}} - \frac{\ln u}{n}\right| \times \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{3}{2}\left(\frac{\ln u}{n}\right)^2 \times \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u \\
&\quad \text{(inégalité de Taylor précédente avec } x = \frac{\ln u}{n} < 0\text{)} \\
&\leqslant \boxed{\frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\mathrm{d}u.}
\end{aligned}$$

(b) Divisons l'inégalité précédente par $\frac{I}{n}$ (I est non nulle car $u \mapsto \frac{\ln u}{1-u}$ est continue négative sur $]0,1[$ et non identiquement nulle). On a donc :

$$\left|\frac{nv_n}{I} - 1\right| \leqslant \underbrace{\frac{3}{2n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \times \underbrace{\frac{\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\mathrm{d}u}{I}}_{\text{constante}}$$

donc, par encadrement, $\frac{nv_n}{I}$ tend vers 1, c'est-à-dire : $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I}{n}.}$ Puis :

$$\boxed{u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{I}{n^2}.}$$

Exercice 2 - ECRICOME ECS 2008

J'ai failli écrire « cf DS précédent ». Mais bon, pour que vous puissiez regarder dès la sortie du DS, revoici la correction.

1. (a) Soit $x \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n-x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ converge (critère de Riemann). Donc par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n(x) \text{ converge également.}}$

(b) On a :

$$\boxed{F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0}\right) = 0.}$$

On a également $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Passons aux sommes partielles. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}0}.$$

Donc $\boxed{F(1) = 1.}$

2. Commençons par remarquer que f_n est effectivement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ dès lors que $n \geqslant 1$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Encore une fois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann. Donc, par équivalence de termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } f_n'(x) \text{ converge.}}$

3. (a) φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi''(x) = \frac{2}{x^3}$. Cette dérivée seconde est décroissante, donc sur l'intervalle $[n, +\infty[$, on peut la majorer par sa valeur en n.

Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne à l'ordre 2, au voisinage de $x_0 \in [n, +\infty[$:

$$\boxed{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\varphi''(n) \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2} \times \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h\frac{1}{(n+x)^2}\right| \\
&= \left|-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + ((n+x+h)-(n+x))\varphi'(n+x)\right| \\
&\underset{\text{signe inversé}}{=} \left|\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - ((n+x+h)-(n+x))\varphi'(n+x)\right| \\
&\leqslant \frac{h^2}{n^3}.
\end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3}$ converge (critère de Riemann). Donc, par comparaison,
$\boxed{\text{la série de terme général } |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \text{ converge absolument donc converge.}}$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $h \neq 0$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| &= \left|\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{h}\left(f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)\right)\right| \\
&\quad \textit{(somme de séries convergentes)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \\
&\quad \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^2}{n^3} \\
&\leqslant |h| \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a bien :

$$\boxed{\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.}$$

(d) Ainsi, on a :

$$0 \leqslant \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant \underbrace{K|h|}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

Donc, par encadrement $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$ c'est-à-dire la limite existe et est réelle.
$\boxed{F \text{ est donc dérivable en } x}$ et on a :

$$\boxed{F'(x) = G(x).}$$

4. (a) $x \in \mathbb{R}_+$ est fixé. On étudie alors la fonction $\psi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $\psi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$.
Donc ψ est décroissante et donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \psi(k+1) \leqslant \psi(t) \leqslant \psi(k)$$

qui peut aussi s'écrire $\forall t \in [k, k+1],\ f_{k+1}(x) \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant f_k(x)$. Par croissance de l'intégrale, on trouve :

$$\boxed{\underbrace{\int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\mathrm{d}t}_{=f_{k+1}(x)} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f_k(x)\mathrm{d}t}_{=f_k(x)}.}$$

(b) On somme l'inégalité de droite précédente, avec $n \geqslant 2$:

$$\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t}_{=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x).}$$

On obtient bien la première inégalité.
Pour l'autre inégalité, on procède de manière similaire :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x)}_{=\sum_{k'=2}^{n} f_{k'}(x)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k}^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t}_{=\int_1^{n}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t}.$$

On rajoute alors le premier terme manquant de la somme :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \underbrace{f_1(x)}_{=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}} + \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

On a bien finalement :

$$\boxed{\int_{1}^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.}$$

(c) Le but est de passer à la limite $n \to +\infty$. Calculons d'abord la forme des termes de gauche et droite.

$$\int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \ln(n) - \ln(n+x) - \ln(1) + \ln(1+x) = \ln \frac{n(1+x)}{n+x}.$$

On a $\frac{n(1+x)}{n+x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1+x$ donc : $\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)$.
Par passage à la limite, on en déduit l'encadrement :

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)}_{=F(x)} \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

(d) Puisqu'on étudie la limite $x \to +\infty$, on peut diviser par $\ln(1+x)$. On obtient pour $x > 0$:

$$1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \underbrace{\frac{x}{(x+1)\ln(1+x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + 1.$$

Donc par encadrement, $\frac{F(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire :

$$\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Exercice 3 - EDHEC ECS 2016

1. (a) On a :

$$(f - \mathrm{Id})^2 + f \circ (2\mathrm{Id} - f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 \boxed{= \mathrm{Id}.}$$
$$\text{(car } f \text{ et Id commutent)}$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\boxed{(f-\mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = \mathrm{Id}(x) = x.}$

(c) Le résultat permet de montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. En effet, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + (f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x).$$

Or $(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x) = f((2\mathrm{Id} - f)(x)) \in \mathrm{Im}(f)$ par définition. De plus, on a :

$$f((f-\mathrm{Id})^2(x)) = (f \circ (f-\mathrm{Id})^2)(x) = 0.$$

Donc $(f-\mathrm{Id})^2(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, on peut écrire :

$$x = \underbrace{(f-\mathrm{Id})^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f \circ (2\mathrm{Id} - f))(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)}.$$

Donc on a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ et donc $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).}$

Il reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. Faisons-le par un calcul sur les dimensions. On a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f).$$

Or $\dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^n = n$. De plus, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Donc nécessairement :

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0.}$$

Cela implique que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donc que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont en somme directe.}}$

Donc finalement $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. On écrira $P = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + X(aX+b) &= 1 \\ \Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 + 4aX^2 + 4bX &= 4 \\ \Leftrightarrow (4a+1)X^2 + (4b-5)X &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4a+1 &=& 0 \\ 4b-5 &=& 0 \end{array} \right. & \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -\frac{1}{4} \\ b &=& \frac{5}{4} \end{array} \right. & \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4} \text{ est l'unique polynome de degré 1}}$ tel que :

$$\boxed{\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1}$$

(b) Comme f et Id commutent, on peut faire les mêmes calculs en remplaçant X par f. On trouve alors :

$$\boxed{\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right) = \mathrm{Id}.}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{x = \frac{1}{4}((f-\mathrm{Id}) \circ (f - 4\mathrm{Id}))(x) + (f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right))(x).}$$

Comme dans la première question, on peut alors remarquer que :

$$(f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right))(x) = f(\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right)(x)) \in \mathrm{Im}(f)$$

et : $f(\frac{1}{4}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))(x)) = \frac{1}{4}f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Donc $\frac{1}{4}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. D'où :

$$\boxed{x = \underbrace{\frac{1}{4}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))(x)}_{\in\mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f\circ\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}\mathrm{Id}\right)(x)}_{\in\mathrm{Im}(f)}.}$$

Ainsi, on a $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).}$
Il reste à prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe. On procède exactement comme dans la question 1 :

$$\dim \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f) = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f))}_{=n} - \underbrace{(\dim\mathrm{Ker}(f) + \dim\mathrm{Im}(f))}_{=n} = 0.$$

D'où $\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f).}$

3. (a) Comme P est de degré p, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$ où $a_p \neq 0$. On a $P(0) = 0$. Donc :

$$\underbrace{a_0 + a_1\times 0 + a_2\times 0^2 + \cdots + a_p\times 0^p}_{=a_0} = 0.$$

Donc $\boxed{P = a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p.}$
De plus $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + pa_pX^{p-1}$. Donc $P'(0) = a_1$. Et comme $P'(0)\neq 0$, on a : $\boxed{a_1 \neq 0.}$
Donc $\boxed{\text{il existe bien } (a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{R}^p \text{ avec } a_1\neq 0 \text{ (et même } a_p\neq 0) \text{ tel que } P = a_1X + a_2X^2+\cdots+a_pX^p.}$

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. Montrons que $x = 0$.
Comme $x\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $y\in\mathbb{R}^n$, tel que $x = f(y)$. Comme P est un polynôme annulateur de f, on a :

$$a_1f(y) + a_2(f\circ f)(y) + \cdots + a_pf^p(y) = 0$$

que l'on peut réécrire dans ce contexte : $a_1x + a_2f(x) + \cdots + a_pf^{p-1}(x) = 0$.
Or $x\in\mathrm{Ker}(f)$. Donc $f(x) = \cdots = f^{p-1}(x) = 0$ puis :

$$a_1x = 0.$$

Et comme $a_1 \neq 0$, on a finalement $\boxed{x = 0.}$
$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \text{ sont en somme directe.}}$
De plus, d'après le théorème du rang, on a : $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = \dim\mathbb{R}^n$. Et ainsi, par égalité des dimensions, on a :

$$\boxed{\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^n.}$$

(c) Les deux questions précédentes sont l'application de cette question avec $P = X(X-1)^2$ et $P = X(X-1)(X-4)$ respectivement. On a bien dans chaque cas que ce sont des polynômes annulateurs de degré au moins 2, avec $P(0) = 0$ et $P'(0)\neq 0$.

Problème 4 - Ecricome ECS 2018

Partie I - Variables vérifiant une relation de Panjer

1. (a) Procédons par récurrence sur k. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$H_k \ : \ \text{« } P(N=k) = \frac{b^k}{k!} P(N=0). \text{ »}$$

- **Initialisation :** pour $k=0$, on a : $P(N=k) = P(N=0)$ et : $\frac{b^k}{k!} P(N=0) = \frac{b^0}{0!} P(N=0) = P(N=0)$. Donc $\boxed{H_0 \text{ est bien vérifiée.}}$
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k vérifiée. Montrons que H_{k+1} l'est aussi. On a $P(N=k+1) = \left(0 + \frac{b}{k+1}\right) P(N=k)$ car N vérifie une relation de Panjer. Donc :

$$P(N=k+1) = \frac{b}{k+1} \times \frac{b^k}{k!} P(N=0)$$

d'après l'hypothèse de récurrence. On peut simplifier en : $\boxed{P(N=k+1) = \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} P(N=0).}$

Donc $\boxed{H_{k+1} \text{ est bien vérifiée.}}$

$\boxed{\text{Par récurrence sur } k, \text{ la relation est bien vraie pour tout } k \in \mathbb{N}.}$

(b) On a donc, sous réserve de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} P(N=0).$$

La deuxième série est une série exponentielle qui converge pour tout $b \in \mathbb{R}$ (et donc pour $b > 0$). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = \exp(b) P(N=0).$$

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$ car les $[N=k]$ forment un système complet d'événements. Donc $P(N=0) = \exp(-b)$. On en déduit la loi de N donnée pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\boxed{P(N=k) = \frac{b^k}{k!} \mathrm{e}^{-b}.}$$

C'est bien une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } b.}$ Son espérance est $\boxed{E(N) = \frac{1}{b}}$ et sa variance est $\boxed{V(N) = \frac{1}{b}.}$

2. (a) Montrons d'abord que $P(N=2) = 0$. On a :

$$P(N=2) = \left(a + \frac{b}{2}\right) P(N=1)$$

car N vérifie une relation de Panjer. Puis $b = -2a$. Donc :

$$\boxed{P(N=2) = \left(a + \frac{-2a}{2}\right) P(N=1) = (a-a) P(N=1) = 0.}$$

Comme les termes suivants s'obtiennent en multipliant le terme précédent, on a par une récurrence immédiate $\boxed{P(N=k) = 0 \text{ pour tout } k \geq 2.}$

(b) Posons $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 - p = P(N=0)$. Comme $P(N=0) \in [0,1]$, on a $p \in [0,1]$.
Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$, on a $P(N=0) + P(N=1) = 1$ et donc $P(N=1) = p$. Donc N suit bien une loi de Bernoulli. Il reste à préciser p.
On a $p = P(N=1) = \left(a + \frac{b}{1}\right) P(N=0) = (a - 2a)(1-p) = -a(1-p)$. On résout alors l'équation d'inconnue p avec une solution en fonction de a :

$$\begin{aligned} & p = -a(1-p) \quad \Leftrightarrow \quad p = -a + ap \\ \Leftrightarrow \quad & p - ap = -a \quad \Leftrightarrow \quad (1-a)p = -a \\ \Leftrightarrow \quad & p = \frac{-a}{1-a} = \frac{a}{a-1}. \end{aligned}$$

On peut voir ici que $p \in]0,1[$ est garanti par $a < 0$ et on comprend donc l'origine de la condition sur a dans l'énoncé. $\boxed{N \text{ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre } p = \frac{a}{a-1}.}$

3. (a) On commence par rappeler la loi de Z. On a pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Soit désormais $k \in [\![1,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!(n-(k-1))}{k \times (k-1)!(n-(k-1))!}p^{k-1} \times p(1-p)^{n-(k-1)} \times \frac{1}{1-p} \\
&= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}p^{k-1}(1-p)^{n-(k-1)} \\
&= \boxed{\frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z=k-1)}
\end{aligned}$$

où toutes les règles de calcul s'appliquent sans problème car $k \neq 0$.

(b) Remarquons que l'on peut écrire :

$$\frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times = -\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{k}.$$

Si on pose $\boxed{a = \frac{-p}{1-p}}$ (qui est négatif donc on a bien $a < 1$) et $\boxed{b = \frac{p(n+1)}{1-p}}$, les premiers termes de la loi de probabilité de Z semblent bien suivre une relation de Panjer. Il faut encore vérifier que c'est le cas pour $k \geq n+1$.

Vérifions que $P(N=n+1)$ et $P(N=n)$ sont bien correctement relié. Les autres termes ne posent pas problème car ils sont tous nuls et vérifient donc la relation de Panjer ci-dessus.

Calculons :

$$\left(-\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{n+1}\right) P(N=n) = \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{p(n+1)}{(1-p)(n+1)}\right) P(N=n)$$

$$= \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{p}{1-p}\right) P(N=n) = 0 \times P(N=n) = 0 = P(N=n+1).$$

$\boxed{\text{La relation de Panjer est donc bien vérifiée}}$ pour $k \leq n$ (question précédente) pour $k = n+1$ (voir ci-dessus)et $k > n+1$ (trivial car tous les termes sont nuls).

4. (a) On a $P(N=1) = (a+b)P(N=0)$.

Si $P(N=0) = 0$ alors par une récurrence immédiate, $P(N=k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est impossible car $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$. Donc $P(N=0) \neq 0$.

Ainsi $a + b = \frac{P(N=1)}{P(N=0)}$. Comme les probabilités sont toutes deux positives, on a $\boxed{a+b \geq 0.}$

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) &= \sum_{k=1}^{m} k\left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1) = a\sum_{k=1}^{m} kP(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k}P(N=k-1) \\
&= \boxed{a\sum_{k'=0}^{m-1}(k'+1)P(N=k') + b\sum_{k'=0}^{m-1} P(N=k')} \text{ avec } k' = k-1.
\end{aligned}$$

(c) Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On a en réordonnant les termes :

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) - a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)$$

Et donc $(1-a)\sum_{k=1}^{m-1} kP(N=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) - mP(N=m)$.
Ainsi, pour tout $m' \geq 1$ (en posant $m' = m-1$), on a :

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=1}^{m'} kP(N=k) &= (a+b)\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) - (m'+1)P(N=m'+1)\\ &\leq (a+b)\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) \boxed{\leq (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) \leq a+b.}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } \left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geq 1} \text{ est majorée.}}$
Comme la suite est croissante (c'est une somme partielle d'une série à termes positifs), elle converge vers un réel. On en déduit que la série de terme général $kP(N=k)$ converge (absolument puisque positive), c'est-à-dire que $\boxed{N \text{ admet une espérance.}}$
Pour calculer l'espérance, on s'appuie sur la relation $\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)$ valable pour $m \geq 1$. On l'écrit plutôt :

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

Puis on passe à la limite (qui existe d'après ce qui précède). On a $\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 1$. Et les deux autres sommes ont la même limite (le terme $k=0$ n'a pas d'importance car il vaut 0) et tendent vers $E(N)$. Donc $E(N) = aE(N) + (a+b)$. D'où :

$$\boxed{E(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

(d) *C'est une question un peu longue à traiter et c'est une redite des deux précédentes.*
On commence par remarquer que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k) &= \sum_{k=1}^{m} k^2\left(a+\frac{b}{k}\right)P(N=k-1)\\ &= a\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m} kP(N=k-1) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k).\end{aligned}$$

Encore une fois, cela permet d'étudier avec $m' = m-1$:

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m'} k^2P(N=k) = \sum_{k=0}^{m'}(2a+b)kP(N=k) + b\sum_{k=0}^{m'} P(N=k) - a(m'+1)^2P(N=m'+1).$$

On a donc $(1-a)\sum_{k=1}^{m'} k^2P(N=k) \leqslant (2a+b)E(N)+b$. Donc de la même manière que dans la question précédente, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(N=k)$ converge.
On revient alors à :

$$\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} k^2P(N=k) + (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

En passant à la limite, on obtient : $E(N^2) = aE(N^2) + (2a+b)E(N) + (a+b)$. D'où :

$$E(N^2) = \frac{1}{1-a}\left((2a+b)E(N) + (a+b)\right).$$

Et en utilisant la formule de la question précédente, on obtient :

$$E(N^2) = \frac{1}{1-a}\left((2a+b)\frac{a+b}{1-a} + (a+b)\right) = \boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}}.$$

(e) N admet un moment d'ordre 2 donc d'après le théorème de Kœnig-Huygens, N admet une variance et :

$$V(N) = E(N^2) - E(N)^2 = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \left(\frac{a+b}{1-a}\right)^2 = \boxed{\frac{a+b}{(1-a)^2}.}$$

(f) L'implication ($\Leftarrow$) découle des propriétés sur les lois de Poisson.
On considère donc l'implication ($\Rightarrow$). Montrons que si $E(N) = V(N)$ alors $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Supposons $E(N) = V(N)$. D'après les questions précédentes, on a alors :

$$\frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

On trouve alors que $1 - a = 1$ c'est-à-dire que $a = 0$. Comme $a + b \geq 0$, on en déduit que $b \geq 0$.
De plus $b \neq 0$, car sinon $P(N = 1) = 0 \times P(N = 0) = 0$ et donc $P(N = 0) = 1$ ce qui est exclus.
Donc $b > 0$ et on se retrouve dans le cadre de la première question. Et ainsi $\boxed{N \text{ suit bien une loi } \mathcal{P}(b).}$

Partie II - Fonction génératrice

5. Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq p_k x^k \leq p_k$.
Or la somme des p_k converge vers 1. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{k\geq 0} p_k x^k$ converge donc bien.
6. Notons déjà que f est $\mathcal{C}^\infty$ puisque $1 - ax \neq 0$ puisque $x \in [0, 1]$ et $a \in]0, 1[$ et donc la proposition sur les dérivées successives a du sens.
Montrons la proposition par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$H_k \ : \ \text{« } \forall x \in [0, 1], \ f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1 - ax)^{\alpha - k}. \text{ »}$$

- **Initialisation :** Pour $k = 0$, on a d'une part :

$$\forall x \in [0, 1], \ f^{(k)}(x) = f^{(0)}(x) = f(x) = \boxed{p_0(1 - ax)^\alpha}$$

et d'autre part :

$$\forall x \in [0, 1], \ k! \times p_k(1 - ax)^{\alpha - k} = 0! \times p_0(1 - ax)^{\alpha - 0} = \boxed{p_0(1 - ax)^\alpha.}$$

On a donc bien H_0.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que H_k est vraie. Montrons que H_{k+1} l'est également.
Soit $x \in [0, 1]$. Calculons :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) \\ &= k! \times p_k(\alpha - k)(-a)(1 - ax)^{\alpha - k - 1} \\ &\quad \text{(Calcul de dérivée)} \\ &= k! \times p_k \left(\frac{-(a+b)}{a} - k\right)(-a)(1 - ax)^{\alpha - k - 1} \\ &\quad \text{(Formule de } \alpha\text{)} \\ &= k!\,(a + b + ak)\,p_k(1 - ax)^{\alpha - k - 1} \\ &= k!(a(k+1) + b)p_k(1 - ax)^{\alpha - k - 1} \\ &= k!(k+1)\left(a + \frac{b}{k+1}\right)p_k(1 - ax)^{\alpha - k - 1} \\ &\quad \text{(On sort un } k+1\text{)} \\ &= \boxed{(k+1)!p_{k+1}(1 - ax)^{\alpha - k - 1}.} \\ &\quad \text{(Formule de Panjer)} \end{aligned}$$

Donc H_{k+1} est vraie.

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a bien la formule vérifiée pour tout k.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral en 0 et à l'ordre n. Toujours pour $x \in [0,1]$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $f^{(k)}(0) = k!p_k(1-a\times 0)^{\alpha-k} = k!p_k$ et de plus pour $t \in [0,1]$: $f^{(n+1)}(t) = (n+1)!p_{n+1}(1-at)^{\alpha-n-1}$. Donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + \int_0^x (n+1)p_{n+1}(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t$$

que l'on peut réécrire :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.}$$

(b) Soit $t \in [0,x]$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad x-t \leqslant 1-at \text{ (car } 1-at>0)$$
$$\Leftrightarrow\quad x-1 \leqslant t(1-a) \Leftrightarrow \frac{x-1}{1-a} \leqslant t \text{ (car } 1-a>0 \text{ puisque } a<1)$$

Or $x-1 \leq 0$ et $t \geq 0$. Donc la dernière inégalité est vraie. On en déduit que effectivement :

$$\boxed{\frac{x-t}{1-at} \leq 1.}$$

Encondrons désormais, pour $t \in [0,x]$ et $n \in \mathbb{N}$ la quantité $(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n$. On a :

$$(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n = (1-at)^{\alpha-n-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n(1-at)^n = (1-at)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n.$$

Tous les termes sont positifs et on peut appliquer l'inégalité précédente pour obtenir :

$$0 \leq (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \leq (1-at)^{\alpha-1}.$$

Puis par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens), on a :

$$\int_0^x 0\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int 0^x(1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

D'où effectivement :

$$\boxed{0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.}$$

(c) D'après la question précédente, on a :

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Donc en multipliant par $(n+1)p_{n+1} \geq 0$:

$$0 \leq (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leq (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

Or N admet une espérance d'après la première partie. Donc la série des np_n converge et ainsi $(n+1)p_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dans le terme de droite, l'intégrale ne dépend pas de n et donc est une constante.

La terme de droite tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(n+1)p_{n+1}\int_0^x(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t=0.}$$

Donc en passant à la limite dans l'équation :

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}p_kx^k}_{\to G(x)}+\underbrace{(n+1)p_{n+1}\int_0^x(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t}_{\to 0},$$

on obtient : $f(x)=G(x)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{G(x)=p_0(1-ax)^{\alpha}.}$$

Calculons désormais : $G(1)=p_0(1-a)^{\alpha}$. Mais on a aussi :

$$G(1)=\sum_{k\geq 0}p_k1^k=\sum_{k\geq 0}p_k=1.$$

Donc $p_0(1-a)^{\alpha}=1$. Et on a ainsi : $\boxed{p_0=(1-a)^{-\alpha}.}$

De même, calculons :

$$\begin{aligned}G'(1)&=p_0\alpha(-a)(1-a\times 1)^{\alpha-1}=(1-a)^{-\alpha}\alpha(-a)(1-a)^{\alpha-1}\\&=\frac{-a\alpha}{1-a}=\frac{-a\times\frac{-(a+b)}{a}}{1-a}\\&=\frac{a+b}{1-a}\boxed{=E(N)}\end{aligned}$$

en utilisant l'expression de $E(N)$ trouvée en première partie.

Partie III - Formule de récursivité

8. Notons pour cette question $q=P(X_k=0)$. q est bien définie car les X_k suivent toutes la même loi.
   Les événements $[N=k]$ pour $k\in\mathbb{N}$ forment un ensemble complet d'événements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P([S=0]\cap[N=k])=\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)P_{[N=k]}(S=0).$$

   Remarquons ici que la formule précédente n'est pas entièrement juste : si l'une des probabilités $P(N=k)$ s'annule, alors $P(N=k)P_{[N=k]}(S=0)$ n'est pas défini. Mais dans ce cas, il suffit d'exclure le terme correspondant (qui était nul de toute façon à la ligne précédente).
   Commençons par traiter le cas $P(N=k)\neq 0$. On verra comment ajuster la formule pour les autres cas après. On cherche alors à caractériser $S=0$ sachant $N=k$. Distinguons deux possibilités :
   - Si $k=0$, alors $S=0$ et donc $P_{[N=k]}(S=0)=1$.
   - Si $k\neq 0$, remarquons que, comme les X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $S=0$ (sachant $N=k$) si et seulement si tous les $X_i=0$ pour $i\in[\![1,k]\!]$. On peut donc écrire :

$$P_{[N=k]}(S=0)=P_{[N=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right).$$

   Détaillons la formule :

$$P_{[N=k]}(S=0)=\frac{P\left([N=k]\cap\left[\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\right]\right)}{P(N=k)}.$$

   Or les variables sont mutuellement indépendantes. Donc :

$$P_{[N=k]}(S=0)=\frac{P(N=k)\prod_{i=1}^{k}P(X_i=0)}{P(N=k)}=\prod_{i=1}^{k}P(X_i=0)=q^k$$

   où on a utilisé la notation $q=P(X_i=0)$.

Ainsu si $P(N=k) \neq 0$, on a :
$$P([S=0]\cap[N=k]) = P(N=k)q^k$$
et on remarque que la formule est bien valable pour $k=0$ également.
Revenons maintenant au cas où $P(N=k)=0$. Dans ce cas, on a : $0 \leq P([S=0]\cap[N=k]) \leq P(N=k)=0$. Donc $P([S=0]\cap[N=k])=0$. D'autre part $P(N=k)q^k=0$. Donc dans tous les cas, on a bien :
$$\boxed{P([S=0]\cap[N=k]) = P(N=k)q^k.}$$
Donc on peut écrire :
$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k q^k = G(q)$$
où on a utilisé la notation $p_k = P(N=k)$ de la partie précédente. On en déduit, dans les notations de l'énoncé :
$$\boxed{P(S=0) = G(P(X_i=0))}$$
où l'on peut choisir arbitrairement la variable X_i puisqu'elles suivent toutes la même loi. On peut aussi l'écrire :
$$\boxed{P(S=0) = \left(\frac{1-aP(X_i=0)}{1-a}\right)^{\alpha}}$$
en utilisant la formule de G et celle de p_0 trouvées dans la partie précédente.

9. (a) Les calculs précédents fonctionnent de manière similaire sauf que cette fois $a=0$ et $b=\lambda$. On obtient donc :
$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)q^k.$$
Mais on ne peut pas utiliser la formule de G puisqu'il fallait $a \in]0,1[$. On utilise plutôt le fait que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et donc que : $P(N=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.
D'où $P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} q^k$. Et ainsi :
$$P(S=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{q\lambda} = \boxed{\mathrm{e}^{\lambda(q-1)}.}$$
Et on peut encore l'écrire :
$$\boxed{P(S=0) = \mathrm{e}^{\lambda(P(X_i=0)-1)}.}$$

(b) Dans la fonction **Python**, la condition `rd.random() < 1/2` est réalisée avec une probabilité $1/2$. Cette partie simule donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $1/2$. La boucle `for i in range(1,n+1):` répète n fois cette condition, et le le code `y = y +1` incrémente un compteur qui compte donc le nombre de succès. Les réalisations étant indépendantes, y contient finalement le nombre de succès de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. La valeur y renvoyée permet donc de simuler une variable de une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

(c) On propose la fonction suivante :

```python
def simulS(mu,n):
  N = rd.poisson(mu)
  if N == 0:
    # Si N vaut 0, il suffit de renvoyer 0
    return 0
  # Sinon, on va simuler X plusieurs fois et
  # on accumule les resultats dans une variable S
  S = 0
  for k in range(1,N+1):
    # Attention, c'est un grand N dans range mais un petit n dans simulX
    S = S + simulX(n)
  return S
```

Noter que l'on peut se passer du **if** initial en remarquant que la boucle ne s'exécute pas si $N = 0$. Cela permet un code légèrement plus compact :

```
def simulS_v2(mu,n):
  N = rd.poisson(mu)
  S = 0
  # Si N = 0, cette boucle prend range(1,1) qui ne contient aucun
  # element et donc la boucle ne s'execute pas laissant S a 0.
  for k in range(1,N+1):
    S = S + simulX(n)
  return S
```

10. (a) Suivons l'indication de l'énoncé et calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$ la quantité $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1} = k)$. Commençons par remarquer que cette quantité existe puisque les X_i sont positifs et tous majorés par k presque sûrement sachant $S_{n+1} = k$. On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1}=k) &= E\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \middle| S_{n+1}=k\right)\\ &\quad\text{(linéarité de l'espérance)}\\ &= E\left(S_{n+1}\middle|S_{n+1}=k\right)\\ &\quad\text{(définition de } S_{n+1})\\ &= k. \text{ (espérance d'une variable aléatoire constante)}\end{aligned}$$

Or les X_i suivent tous la même loi et ont donc tous la même espérance sachant $S_{n+1} = k$. Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a donc :

$$E(X_i|S_{n+1}=k) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} E(X_j|S_{n+1}=k)}{n+1} = \boxed{\frac{k}{n+1}}.$$

(b) Soit $j \in [\![0, k]\!]$. On a par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k) = P([S_{n+1}=k] \cap [X_{n+1}=j]).$$

Or $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Donc :

$$\begin{aligned}&P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k) = P([S_n + X_{n+1}=k] \cap [X_{n+1}=j])\\ =\ &P([S_n+j=k]\cap[X_{n+1}=j]) = P([S_n=k-j]\cap[X_{n+1}=j])\\ =\ &P(X_{n+1}=j)P_{[X_{n+1}=j]}(S_n=k-j).\end{aligned}$$

Or S_n et X_{n+1} sont indépendantes (c'est le lemme des coalitions). Donc $P_{[X_{n+1}=j]}(S_n = k-j) = P(S_n = k-j)$. De plus $P(X_{n+1} = j) = P(X_1 = j) = q_j$ car X_1 et X_{n+1} ont la même loi. D'où :

$$\boxed{P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k) = q_jP(S_n=k-j).}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j) &= \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k)\\ &= P(S_{n+1}=k)\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j).\end{aligned}$$

À ce moment, on constate que l'on peut séparer la somme en deux. On a d'une part :

$$\sum_{j=0}^{k} aP_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j) = a\sum_{j=0}^{k} P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j) = a\times 1.$$

puisque $[X_{n+1} \notin [\![0, k]\!]]$ est quasi-impossible sachant $[S_{n+1} = k]$. Et d'autre part, on a :

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{bj}{k} P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) = \frac{b}{k} \sum_{j=0}^{k} j P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)$$
$$= \frac{b}{k} E(X_{n+1}|S_{n+1} = k) = \frac{b}{k} \times \frac{k}{n+1} = \frac{b}{n+1}.$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

11. (a) Soit $j \in [\![0, k]\!]$.
Considérons le système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S = k - j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([S = k - j] \cap [N = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([S_n = k - j] \cap [N = n]) (\text{car } S = S_n \text{ si } N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = k - j)P(N = n) \boxed{= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).} \\ &\quad (\text{car } S_n \text{ et } N \text{ sont indépendantes}) \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j)$$

(l'interversion des sommes est légitimes puisque toutes les séries de départ convergent)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k) \boxed{= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).} \text{ (car } N \text{ suit une relation de Panjer)}$$

(c) On considère encore une fois le système complet d'événements $([N = n])_{n\geq 0}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([S = k] \cap [N = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([S_n = k] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = k)P(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k) \\ &\quad (\text{Lemme des coalitions appliqué à l'indépendance de } N \text{ et } S_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n P(S_n = k) \boxed{= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).} \\ &\quad (S_0 = 0 \text{ et } k \geq 1) \end{aligned}$$

(d) En combinant les deux questions précédentes, on a immédiatement : $P(S = k) = \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j)$.
On isole alors le terme $j = 0$: $P(S = k) = aq_0 P(S = k) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j)$. Et en résolvant pour $P(S = k)$, on obtient :

$$\boxed{P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).}$$