Khôlle 0 & 1 — Compétences d'ECG-1

K1 • FONCTIONS POLYNOMIALES

- Factoriser un polynôme à l'aide d' :
  - un facteur commun
  - une identité remarquable
  - une ou des racines évidentes puis une identification des coefficients ou une division euclidienne de polynômes
  - un facteur donné dans l'énoncé
- Résoudre des équations faisant intervenir un polynôme :
  - soit directement
  - soit après un changement de variable
- Résoudre des inéquations faisant intervenir un polynôme, étudier le signe d'un polynôme
- Résoudre des équations polynomiales avec un paramètre
- Décomposer une fonction rationnelle en éléments simples
- Résoudre des systèmes de la forme $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$ avec x, y les inconnues et a, b deux réels fixés
- Utiliser le degré pour résoudre une équation dans laquelle l'inconnue est un polynôme
- Étudier les variations d'une fonction polynomiale en étudiant le signe de sa dérivée
- Établir puis dresser un tableau de variations

Exercice I.1 [Correction p. 14]

Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $\mathrm{P} = (1+\mathrm{X})^p$, $\mathrm{Q} = (1+\mathrm{X})^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ.

Quelle relation peut-on en déduire ?

K2 • NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

- Savoir utiliser les symboles $\sum$ et $\prod$
- Calculer des sommes finies :
  - en utilisant des sommes remarquables (sommes usuelles, etc.)
  - en utilisant un changement d'indice
  - en utilisant un télescopage
  - en ajoutant/retranchant des termes
  - en utilisant une réorganisation des termes

Exercice I.2 [Correction p. 14]

Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice I.3 [Correction p. 14]

1. Trouver des réels a, b et c tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}. \tag{I.1}$$

2. En déduire le calcul de $\mathrm{K}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice I.4 [Correction p. 15]

On considère x, un nombre réel, et n un entier naturel.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.
4. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.
5. Dans la même idée, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice I.5 [Correction p. 16]

Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{i+j}$.
2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)$.
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$.
4. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n} ij$.
5. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.
6. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.
7. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$
8. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j}$
9. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$
10. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j}$
11. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{i}{j} 2^{i+j}$
12. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i} 2^{i+j}$
13. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$

Exercice I.6 [Correction p. 17]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

1. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} x^{i+j}$.
2. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij$.
3. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j$.
4. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}$.
5. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$.
6. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$.

K3 • FONCTIONS USUELLES

- Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir les fonctions usuelles (polynôme, valeur absolue, exp, ln, puissances, partie entière)
- Résoudre une équation en effectuant un changement de variable
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Décomposer une fonction à l'aide des opérations (cas d'une somme, des produits, d'une composée, etc.)
- Étudier les variations d'une fonction :
  - à partir du signe de la fonction dérivée calculée à l'aide des formules de dérivation du prébac complétées
  - en décomposant la fonction à partir de fonctions usuelles

— Étudier la parité d'une fonction
— Déterminer un majorant, un minorant, le minimum ou le maximum d'une fonction :
  — à partir du tableau de variations
  — en utilisant des inégalités
— Comparer des expressions algébriques en s'appuyant sur :
  — un enchaînement d'opérations
  — une étude du signe de la différence en passant par une étude de fonction appropriée
— Étudier une fonction du type $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$

Exercice I.7 [CORRECTION P. 18]

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Domaine de définition.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité et tableau de variation.
4. Courbe représentative.

Exercice I.8 [CORRECTION P. 19]

Étudier puis représenter la fonction définie par $f(x) = |\ln|x||$.

1. Domaine de définition et domaine d'étude.
2. Limites aux bornes du domaine de définition.
3. Domaine de dérivabilité. Dérivabilité en 1 et -1.Tableau de variation.
4. Courbe représentative.

K4 • SUITES RÉELLES

— Étudier la monotonie d'une suite (montrer si elle est croissante, décroissante ou ni l'une, ni l'autre) :
  — par signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
  — par comparaison du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 , lorsque u est strictement positive
  — par étude de fonction associée
— Reconnaitre des suites usuelles (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre 2)
— Déterminer la forme explicite des suites usuelles
— Calculer la somme des n premiers termes
— Utiliser une suite auxiliaire pour se ramener à une suite usuelle.
— Encadrer le terme général notamment par un raisonnement par récurrence
— Établir la valeur d'une somme par un raisonnement par récurrence

Exercice I.9 [CORRECTION P. 20]

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 - n + 2$
2. $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n - n \end{cases}$
3. $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = (n^2+1)\alpha_n \end{cases}$
6. $k_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
7. $e_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

Exercice I.10 [Correction p. 21]

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ 0 < v_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire l'éventuelle convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice I.11 [Correction p. 21]

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

K5 • RAISONNEMENTS PAR RÉCURRENCE

— Utiliser et rédiger un raisonnement par récurrence en 4 points :
  — Énoncer la propriété
  — Initialisation
  — Hérédité
  — Conclusion
— Applications

Exercice I.12 [Correction p. 21]

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Exercice I.13 [Correction p. 21]

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1}.$$

Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

K6 • SYSTÈMES LINÉAIRES

— Résoudre des systèmes linéaires :
  — dans le cas où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues
  — dans le cas où le nombre d'équations est strictement supérieur au nombre d'inconnues
  — dans le cas où le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations
— Montrer qu'un système linéaire carré est ou non de Cramer
— Résoudre un système linéaire à paramètre

Exercice I.14 [Correction p. 22]

Résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice I.15 [Correction p. 23]

Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice I.16 [Correction p. 23]

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

K7 • MATRICES

— Calcul matriciel

— Résolution d'une équation matricielle

— Calculer la puissance d'une matrice

— Montrer qu'une matrice est ou n'est pas inversible et, si elle l'est, déterminer son inverse :

  — en utilisant la définition

  — en utilisant un système linéaire

  — en utilisant des opérations élémentaires sur les matrices avec la méthode du pivot de Gauss

  — en utilisant une égalité matricielle.

— Déterminer l'inverse (si elle existe) d'une matrice carrée d'ordre 2 en utilisant la proposition du cours

— Utiliser l'inverse d'une matrice (si elle existe) pour résoudre un système linéaire.

Exercice I.17 [Correction p. 24]

[Puissances de matrice et binôme de Newton]

1. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_3$.

   a. Montrer que B est nilpotente d'indice 3.

   b. En déduire A^n pour tout entier n.

2. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

K8 • DÉNOMBREMENT ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

— Dénombrer un ensemble :

  — en utilisant une réunion disjointe, une partition,

  — en utilisant le complémentaire,

  - en utilisant un produit cartésien,
  - en utilisant un p-uplet d'éléments non distincts d'un ensemble,
  - en utilisant un arrangement,
  - en utilisant une permutation,
  - en utilisant une partie d'un ensemble
- Calculer des coefficients binomiaux :
  - en utilisant la définition
  - en utilisant leurs propriétés dont le triangle de Pascal
  - en utilisant la relation $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- Utiliser la formule du binôme de Newton :
  - pour calculer des sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux
  - pour déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

Exercice I.18 [Correction p. 24]

On compte dans cet exercice les mots des trois lettres choisies parmi les 26 lettres de l'alphabet, avec ou sans signification. Déterminer le nombre de mots de trois lettres :

1. en tout ;
2. deux à deux distinctes ;
3. ayant exactement deux lettres identiques ;
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ;
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne ;
6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle ;
7. contenant au moins une consonne ;
8. contenant au moins une consonne et une voyelle.

K9 • PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

- Expliciter l'univers d'une expérience aléatoire
- Traduire un énoncé en terme d'évènements
- Utiliser la formule de Poincaré (dans le cas de 2 ou 3 évènements)
- Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité et à l'aide des propriétés d'une probabilité

Exercice I.19 [Correction p. 25]

On considère un jeu de dominos. Chaque domino présente deux faces égales (doubles) ou différentes (simples). Ces faces portent un numéro de 0 à 6. Tous les dominos sont différents et toutes les associations existent.

1. Combien y a-t-il de dominos dans le jeu ?
2. On tire au hasard deux dominos. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient une face commune ?

K10 • LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

- Déterminer une limite sans une forme indéterminée
- Déterminer une limite avec une forme indéterminée :
  - en transformant l'expression algébrique
  - en utilisant la règle sur les polynômes ou les fractions rationnelles
  - en utilisant un changement de variable
  - en utilisant l'expression conjuguée ou son opposé
  - en utilisant une majoration, une minoration ou un encadrement
- Étudier la continuité d'une fonction en un point (ainsi que la continuité à gauche ou à droite)

— Prolonger, si c'est possible, une fonction par continuité en un point
— Justifier les asymptotes et les branches infinies de la courbe représentative d'une fonction

Exercice I.20 [Correction p. 26]

Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$
9. $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
12. $\lim\limits_{x\to \alpha^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha>0)$
13. $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \alpha\in\mathbb{R}$
16. $\lim\limits_{x\to \pi} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

K11 • CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

— Montrer qu'une fonction est continue :
  — en un point
  — sur un intervalle
— Étudier les variations d'une fonction, établir son tableau de variations, calculer des limites, ...
— Résoudre une équation du type $f(x)=k$ (avec $k\in\mathbb{R}$), suivant les cas :
  — en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (donne l'existence éventuelle de solutions)
  — en utilisant le théorème de la bijection continue (donne l'existence et l'unicité de la solution)
  — par le calcul
— Montrer qu'une fonction est une bijection
— Dans le cas où une fonction f est bijective, déterminer, si possible, la bijection réciproque f^{-1}
— Savoir exploiter les propriétés de la bijection réciproque f^{-1}

Exercice I.21 [Correction p. 29]

Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice I.22 [Correction p. 29]

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice I.23 [Correction p. 29]

1. Montrer que $f: x\longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la limite de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

K12 • PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

- Déterminer une probabilité conditionnelle :
  - en utilisant la définition
  - en interprétant l'énoncé
  - en utilisant la formule de Bayes
- Utiliser la formule des probabilités composées pour calculer la probabilité de l'intersection d'évènements
- Montrer qu'une famille finie d'évènements est ou n'est pas un système complet d'évènements
- Utiliser la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité d'un évènement
- Montrer que des évènements sont ou non :
  - deux à deux indépendants
  - mutuellement indépendants
- Utiliser l'indépendance d'une famille finie d'évènements pour calculer la probabilité de l'intersection d'évènements

Exercice I.24 [Correction p. 30]

10 garçons et 15 filles descendent de manière désordonnée d'un bus. Quelle est la probabilité que les 3 premiers à descendre soient des garçons et que la quatrième soit une fille ?

Exercice I.25 [Correction p. 30]

Dans un jeu télévisé, trois portes sont fermées.

Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres, un porte-clé.

Le candidat choisit l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle porte cache la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle se trouve un porte-clé.

Il propose alors au candidat de changer de porte. Que doit faire le candidat ?

K13 • LIMITE DE SUITES RÉELLES

- Suites réelles usuelles
- Étudier la monotonie d'une suite réelle
- Étudier la nature d'une suite en utilisant :
  - les opérations sur les limites (limites de fonctions, limites usuelles)
  - des sous-suites
  - une suite auxiliaire qui permet de se ramener à une suite usuelle
  - des encadrements (théorème des gendarmes)
  - la comparaison (compatibilité avec l'ordre...)
  - deux suites adjacentes
  - le théorème de la limite monotone
- Étudier une suite définie par des équations
- Étudier une suite construite à partir d'une somme

Exercice I.26 [Correction p. 30]

[Moyenne arithmético-géométrique] Soient $0 \leqslant b \leqslant a$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

On admettra (ou on démontrera) que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies avec $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ pour tout entier n.

1. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, on a
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$
2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ et $v_{n+1} \geqslant v_n$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
4. Démontrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite. Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $\mathrm{M}(a,b)$.
5. Écrire une fonction Python nommée `moyenne(a,b,ecart)` qui donne un encadrement de $\mathrm{M}(a,b)$, avec une amplitude inférieure ou égale à `ecart`.

K14 • DÉRIVATION

- Montrer qu'une fonction est dérivable (à gauche et à droite) en un point (avec un calcul de limite...)
- Montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle (avec opérations et fonctions de référence...)
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point
- Déterminer le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 au voisinage d'un point
- Calculer de fonctions dérivées
- Étudier les variations d'une fonction.
- Utiliser les Inégalités des accroissements finis pour l'étude de la convergence d'une suite récurrente d'ordre 1
- Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^1, de classe C^n, de classe C^∞ sur un intervalle
- Montrer qu'une fonction est de classe C^1 à l'aide du prolongement par continuité de la dérivée
- Calculer la dérivée n-ième d'une fonction :
  - en utilisant une récurrence
  - en utilisant la formule de Leibniz
- Étudier une fonction en utilisant ses dérivées successives
- Montrer qu'une fonction est convexe ou concave
- Utiliser la convexité d'une fonction pour montrer une inégalité
- Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction

Exercice I.27 [Correction p. 31]

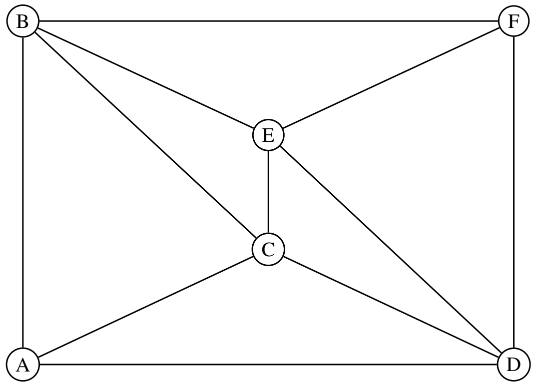
1. Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

K15 • THÉORIE DES GRAPHES

- Maîtrise du vocabulaire (Sommet, arête, chaîne, etc.)
- Déterminer la matrice d'adjacence
- Représentation graphique d'un graphe
- Recherche du plus court chemin à l'aide de l'algorithme de Dijkstra

Exercice I.28 [Correction p. 32]

On considère le graphe $\mathcal{G}$ suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. L'exécution du programme ci-dessous affiche le résultat suivant.

```python
import numpy as np
M=np.array ([[0,1,1,1,0,0],[1,0,1,0,1,1],
    [1,1,0,1,1,0],[1,0,1,0,1,1],
    [0,1,1,1,0,1],[0,1,0,1,1,0]])
print(np.dot(M,M))
```

```
[[3 1 2 1 3 2]
 [1 4 2 4 2 1]
 [2 2 4 2 2 3]
 [1 4 2 4 2 1]
 [3 2 2 2 4 2]
 [2 1 3 1 2 3]]
```

   a. Combien existe-t-il de chaînes de longueur 2 dont le départ et l'extrémité sont respectivement les sommets B et D ? Donner ces chaines.
   b. Justifier que le graphe $\mathcal{S}$ est connexe.

3. Ce graphe possède-t-il une chaine eulérienne ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?
5. Expliquer ce que permet de renvoyer l'exécution de `mystere(M)` dans le cas où `M` est le tableau représentant la matrice d'adjacence du graphe $\mathcal{G}$.

```python
def mystere(M):
    S=['A','B','C','D','E','F']
    n=len(S)
    L=[[] for k in range(n)]

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]!=0:
                L[i].append(S[j])

    return L
```

K16 • PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS INFINI

— Traduire un évènement à l'aide d'une réunion infinie dénombrable ou d'une intersection infinie dénombrable

— Calculer la probabilité d'une réunion finie d'évènements :
  — si les évènements sont deux à deux incompatibles, en utilisant la propriété de σ-additivité
  — sinon, en utilisant la formule de Poincaré ou des évènements contraires
— Calculer la probabilité d'une réunion infinie dénombrable d'évènements :
  — si les évènements sont deux à deux incompatibles, en utilisant la propriété de σ-additivité
  — si les évènements forment une suite croissante d'évènements, en utilisant le théorème de la limite monotone
  — sinon, en utilisant $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right)$
— Calculer la probabilité d'une intersection finie d'évènements :
  — si les évènements sont mutuellement indépendants, en utilisant le produit des probabilités
  — sinon, en utilisant la formule des probabilités composées ou les évènements contraires
— Calculer la probabilité d'une intersection infinie dénombrable d'évènements :
  —
  — si les évènements forment une suite décroissante d'évènements, en utilisant le théorème de la limite monotone
  — sinon, en utilisant $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\right)$
— Calculer la probabilité d'un évènement à l'aide de la formule des probabilités totales

Exercice I.29 [Correction p. 33]

Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).

Il la transmet à I_1, qui la transmet à I_2, …, qui la transmet à I_n.

Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$). Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte ?

Exercice I.30 [Correction p. 33]

Des boules indiscernables et en nombre infini sont placées au hasard et une à une dans deux boîtes (U et V). On place les boules indépendamment les unes des autres.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note U_k l'évènement « La k-ième boule est placée dans l'urne U » et $\mathrm{V}_k = \bar{\mathrm{U}}_k$, c'est-à-dire l'évènement « La k-ième boule est placée dans l'urne V ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_k : « Les deux boîtes sont non vides pour la première fois lorsque l'on place la k-ième boule » pour $k \geqslant 2$.
2. Montrer qu'il est quasi-certain que les deux boîtes deviennent non vides.

K17 • SÉRIES RÉELLES

— Étudier la convergence et, si elle converge, calculer la somme d'une série liée à une série usuelle
— Montrer qu'une série est convergente ou divergente :
  — en utilisant la suite des sommes partielles
  — en utilisant la linéarité et les séries usuelles
  — en utilisant la suite des sommes partielles et un encadrement, une majoration ou minoration
  — en utilisant les suites des sommes partielles d'indices pairs et impairs
  — de manière plus générale en utilisant toutes vos connaissances sur les suites
  — en utilisant la condition nécessaire de convergence (uniquement pour la divergence)

Exercice I.31 [Correction p. 34]

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
3. $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4. $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
5. $\operatorname{ch}^\alpha(n)-\operatorname{sh}^\alpha(n)$.
6. $2\ln(n^3+1)-3\ln(n^2+1)$.
7. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$.
8. $\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
9. $\frac{a^n}{1+a^{2n}}$.
10. $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.
11. $\frac{n!}{n^n}$
12. $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
13. $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
14. $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$
15. $\frac{n^2}{(n-1)!}$
16. $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$
17. $\frac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$
18. $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
19. $\frac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$ où $\mathrm{S}(n)=\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}$.

K18 • INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

— Calculer une intégrale en utilisant :
  — une primitive
  — une décomposition en éléments simples
  — une intégration par parties
  — un changement de variable
— Utiliser les propriétés de l'intégrale (Relation de Chasles, positivité, inégalité, etc.)
— Étudier une suite définie par une intégrale
— Étudier une fonction définie par une intégrale

Exercice I.32 [Correction p. 36]

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.
2. a. On pose $\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{x^n}{n!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x$. Calculer I_0 et montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   b. Montrer que $\mathrm{I}_{k-1}-\mathrm{I}_k=\frac{1}{k!}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
   c. En déduire que $u_n=e-\mathrm{I}_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}u_n$.
3. En déduire que e est irrationnel.

K19 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

— Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant du premier ordre
— Résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constant du second ordre
— Recherche d'une solution particulière

Exercice I.33 [Correction p. 37]

1. Résoudre sur $]2\,;+\infty[$, l'équation différentielle $(x^2-3x+2)y'+y=x^2-2x+2$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y''-2y'+y=xe^x$.

K20 • V.A.R DISCRÈTES

- Déterminer une loi de probabilité
- Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire
- Déterminer la loi, l'espérance, la variance d'une variable aléatoire de la forme $\mathbb{Y} = g(\mathbb{X})$, disposant de la loi de la v.a.r $\mathbb{X}$:
- Théorème de transfert
- Formule de Koenig-Huygens
- Linéarité de l'espérance
- Variance de $a\mathbb{X} + b$.

Exercice I.34 [Correction p. 38]

On considère qu'à un concours, un candidat a 20% de chances de réussir. On prend un groupe de 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 qui passent le concours.

Corrigés

Correction de l'exercice I.1 : [Énoncé]

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comme $(1+\mathrm{X})^p(1+\mathrm{X})^q = (1+\mathrm{X})^{p+q}$ le terme de degré X^n est $\binom{p+q}{n}$ d'après la formule du binôme.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients de P et Q respectivement et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ceux de PQ. On a :
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. Identité dite de Vandermonde.

Correction de l'exercice I.2 : [Énoncé]

Il suffit d'étudier le signe de deux termes consécutifs :
$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{>\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.
$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{<\frac{1}{2n}} - \frac{1}{n} < 0.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante.

Correction de l'exercice I.3 : [Énoncé]

1. Considérons l'équation, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$ en admettant qu'une telle écriture existe.

   En multipliant les deux membres par $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \left(\dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}\right) \times k.$

   Enfin pour $k = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$.

   Multipliant successivement l'équation (I.1) par $k+1$ et évaluant en $k=-1$ puis par $k+2$, évaluant en $k=-2$, on trouve : $b=-1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

   Réciproquement, on vérifie que $a = \dfrac{1}{2}$, $b=-1$ et $c=\dfrac{1}{2}$ conviennent.

   Donc, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{2(k+2)}$.
2. Par un petit miracle, on peut écrire, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right)$.

I – Corrigé

On conclut alors par linéarité et télescopage :

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.4 : [Énoncé]

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans $\mathbb{R}$ le produit est commutatif. D'après le **binôme de Newton**, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1^n = 1.$$

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, $x^k(1-x)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}$ et on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

2. D'après la formule du capitaine, on a : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-1)-\ell} \\ &= nx[x + (1-x)]^{n-1} \\ &= nx.\end{aligned}$$

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

3. De même, $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$ qui entraîne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} \\ &= n(n-1)x^2\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} x^{\ell} (1-x)^{(n-2)-\ell} \\ &= n(n-1)x^2[x + (1-x)]^{n-2} \\ &= n(n-1)x^2.\end{aligned}$$

Corrigé

Pour $x = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= n(n-1)2^{n-2} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}\\ &= n\left(3n-1\right)2^{n-2}.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\qquad + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\qquad + \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right.\\ &\qquad \left.+\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]\\ &= x^2\times 1 - \frac{2x}{n}\times nx + \frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2+nx]\\ &= x^2-2x^2+\left(1-\frac{1}{n}x^2\right)+\frac{1}{n}x\\ &= \frac{x-x^2}{n}.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Correction de l'exercice I.5 : [Énoncé]

1. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}x^{i+j} = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i\sum_{j=0}^{n}x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i\times\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=0}^{n}x^i = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2.$$

2. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = n^2(n+1)$.
3. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$.
4. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=n} ij = \sum_{i=0}^{n}i(n-i) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$.

– Corrigé

5. $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n} j\times\frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^3-j^2)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.$$

6. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. $$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|i-j| = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{j=i+1}^{n} i\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - ni + i^2\right)$$
$$= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

8. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1.$$

9. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1.$$

10. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j} 2^i = \sum_{j=0}^{n}\left(2^{2j+1}-2^j\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{2n+3} - 3\times 2^{n+1} + 1\right).$$

11. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{i}{j} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} 2^i\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j} 2^j = \sum_{i=0}^{n} 2^{2i}$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right).$$

12. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} 2^i = \sum_{j=0}^{n} 6^j$$
$$= \frac{1}{5}\left(6^{n+1}-1\right).$$

13. $$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} 2^j = 3^n.$$

Correction de l'exercice I.6 : [Énoncé]

1. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} x^{i+j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x^i\times x^j) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\prod_{j=1}^{n} x^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\sum_{j=1}^{n} j}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left((x^i)^n\times x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^n = x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}\times x^{\frac{n^2(n+1)}{2}}$$
$$= x^{n^2(n+1)}.$$

– Corrigé

2. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} ij = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(i^n \prod_{1\leqslant j\leqslant n} j\right) = (n!)^n \left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)^n = (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}.$$

3. $$\prod_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} i^j = \prod_{i=1}^{n} i^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\sqrt{n!}\right)^{n(n+1)}.$$

4. $$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} 2^{\frac{i}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j} 2^i\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n}\left(2^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{j}} = \prod_{j=1}^{n} 2^{\frac{(j+1)}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \prod_{j=1}^{n} (\sqrt{2})^j$$
$$= (\sqrt{2})^{\frac{n(n+3)}{2}}$$

5. $$\prod_{1\leqslant i, j\leqslant n} \frac{i}{j} = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} i^n \left(\prod_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{j}\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{i^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{(n!)^n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant n} i\right)^n = \frac{(n!)^n}{(n!)^n} = 1.$$

6. $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \prod_{2\leqslant j\leqslant n}\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant j-1} i\right) = \prod_{2\leqslant j\leqslant n} (j-1)!$$
et $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j = \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left(\prod_{i+1\leqslant j\leqslant n} j\right) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n-1} \frac{n!}{i!} = (n!)^{n-1}\prod_{1\leqslant i\leqslant n-1}\frac{1}{i!} = (n!)^{n-1}\prod_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{(i-1)!}.$$
D'où, $$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} i}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} j} = \frac{1}{(n!)^{n-1}}\left(\prod_{2\leqslant j\leqslant n} (j-1)!\right)^2.$$

Correction de l'exercice I.7 : [Énoncé]

1. La fonction f est définie si, et seulement si $1+\frac{1}{x}>0$ donc
$$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[.$$

2. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{\mathrm{X}=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{\mathrm{X}\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = 1$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de composées :
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e.$$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $y=e$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{\mathrm{X}=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\frac{\ln(1+\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = 0$.
D'après les théorèmes sur les limites de composées, on a donc :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$
On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-1^-} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{u=1+\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{u-1} = +\infty$. Par composition, on a donc :
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty.$$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote d'équation $x=-1$.

3. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a :
$$f'(x) = \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

CORRIGÉ

On ne peut donc pas conclure directement sur le signe de $f'(x)$.

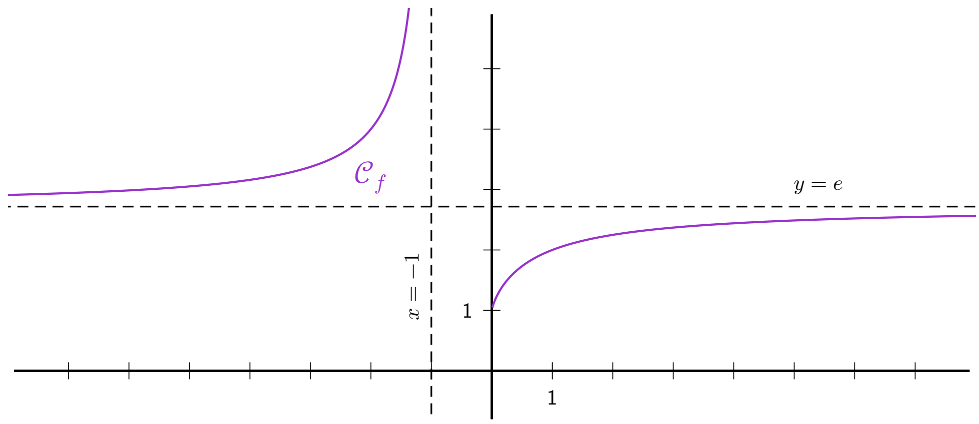
On pose alors $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ qui est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et où :

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

D'où le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	e	$\nearrow$	$+\infty$ ||		|| 1	$\nearrow$	e

On trace les deux asymptotes puis la courbe représentative :



Correction de l'exercice I.8 : [Énoncé]

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

   $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et, $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

   On étudiera donc f seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et on complètera la courbe par symétrie d'axe celui des ordonnées.
2. D'après les théorèmes sur les limites de composées, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$. La courbe de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.
3. $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \longmapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   D'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f est donc dérivable sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.

   Par symétrie, f est dérivable sur $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

   Regardons la limite du taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

– Corrigé

Pour $(-1<)h<0$, $1+h<1$ donc $\ln(1+h)<0$ et $|\ln(1+h)|=-\ln(1+h)$ d'où,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|\ln|1+h||}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 1. Sa courbe y admet deux demi-tangentes de coefficient directeur ± 1.

Enfin,

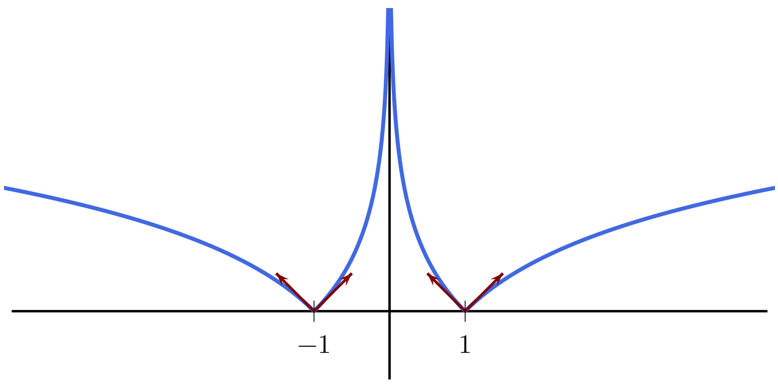
a. $\forall\, x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement croissante.

b. $\forall\, x \in]0\,;1[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$. Donc, f est strictement décroissante.

On en dédit la tableau de variation complet par symétrie :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	||	$-$	|	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4.



Correction de l'exercice I.9 : [Énoncé]

1. La fonction $t \longmapsto t^2-n+2$ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right]$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n=1$.
2. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n=-n<0$ donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n+1}-\mathrm{H}_n=\dfrac{1}{n+1}>0$ donc $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $v_n\neq 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{2}{3}<1$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\neq 0$ à montrer par récurrence $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=n^2+1\geqslant 1$ donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $n\neq 0$ et $\dfrac{k_{n+1}}{k_n}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n<1$ donc $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
7. $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $e_n\neq 0$ et $\dfrac{e_{n+1}}{e_n}=\dfrac{2}{n+1}$ donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n=1$.

I – Corrigé

Correction de l'exercice I.10 : [Énoncé]

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 < v_0 = 1 < 3$ et, en supposant $0 < v_n < 3$, on a :
$$0 < 3 < 6 - v_n < 6 \implies \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \implies 0 < \frac{3}{2} = \frac{9}{6} < v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} = 3.$$

2. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6 - v_n} - v_n = \dfrac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}.$

   D'après la question précédente, $6 - v_n > 0$ dont $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc elle converge vers une limite $\ell \leqslant 3$.

Correction de l'exercice I.11 : [Énoncé]

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} \geqslant 0.$

Donc **la suite** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ **est croissante.**

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^3} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{-(n^2+3n+1)}{(n+1)^3 n^2} \leqslant 0.$

Donc **la suite** $(v_n)_{n\geqslant 1}$ **est décroissante.**

— $v_n - u_n = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

Correction de l'exercice I.12 : [Énoncé]

On montre ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $u_0 = -1 = 3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1$ et pour $n = 1$, $u_1 = -1 = 3^1 - 2^2$ donc la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que $u_k = 3^k - 2^{k+1}$ et $u_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+2}$ (et seulement pour ce k).

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k = 5(3^{k+1} - 2^{k+2}) - 2 \times 3(3^k - 2^{k+1})$
$= 3^{k+1}(5-2) - 2^{k+2}(5-3) = 3^{k+2} - 2^{k+3}.$

La relation est donc vraie pour $k + 2$ et la propriété est héréditaire.

Étant initialisée à partir de $n = 0$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 3^n - 2^{n+1}.$$

Correction de l'exercice I.13 : [Énoncé]

Pour l'hérédité,
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = n^2 + 2(n-1)\frac{n-1}{n+1} \\ &\leqslant n^2 + 2(n-1) = n^2 + 2n + 1 - 3 \leqslant (n+1)^2. \end{aligned}$$
ou
$$\begin{aligned} &= u_n + \frac{2}{n+1}u_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}{n+1} \leqslant \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n+1} = (n+1)^2. \end{aligned}$$

– Corrigé

Correction de l'exercice I.14 : [Énoncé]

$$(\mathcal{S}_{??}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_3 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2t & = & 3 \\ & y & & & & = & 0 \\ & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour bien faire apparaître le rôle des inconnues secondaires en tant que paramètre, on notera plutôt les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$

Correction de l'exercice I.15 : [ÉNONCÉ]

$$(\mathcal{S}_{??}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Correction de l'exercice I.16 : [ÉNONCÉ]

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right. = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des quadruplets $\begin{pmatrix} 3 - \lambda - \mu \\ -1 - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le choix des inconnues, dites *principales*, n'est pas fixé. On aurait très bien pu prendre y et z par exemple pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & 3 & - & x & - & t \end{array}\right.$$

On trouve alors un système des solutions équivalents au précédent et défini par :

$$(0,\ -1,\ 0,\ 3) + \mathrm{Vect}\left((1,\ 0,\ -1,\ 0),\ (0,\ -1,\ -1,\ 1)\right).$$

I – CORRIGÉ

Correction de l'exercice I.17 : [Énoncé]

1. a. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

   La matrice B est donc nilpotente d'indice 3.

   b. Les matrices B et I_3 commutent donc le binôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k \\ &= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. **Première méthode :** Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Deuxième méthode : On a $A = I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^2 = 0$.

   Donc $A^n = (J + I_3)^n = I_3 + nJ = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice I.18 : [Énoncé]

1. en tout :

   $26^3 = 17\ 576$
2. deux à deux distinctes :

   $A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15\ 600$
3. ayant exactement deux lettres identiques :

   — 26 choix pour la lettre double ;
   — 25 choix pour la lettre simple ;
   — 3 choix de position pour la lettre simple.

   $26 \times 25 \times 3 = 1\ 950$
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne :
   — 6 choix pour la première lettre ;
   — 26 choix pour la deuxième lettre ;
   — 20 choix pour la troisième lettre.

   $6 \times 26 \times 20 = 3\ 120$
5. contenant au moins deux voyelles distinctes et une consonne :

   — $\binom{6}{2}$ choix pour les deux voyelles distinctes ;
   — 20 choix la consonne ;
   — Pour chacun de ces choix, $3!$ permutations.

   $\binom{6}{2} \times 20 \times 3! = 15 \times 20 \times 6 = 1\ 800$

6. contenant deux consonnes identiques et une voyelle :

   — 20 choix pour la consonne doublée ;
   — 6 choix la voyelle ;
   — Pour chacun de ces choix, 3 possibilités de placer la voyelle.

   $20 \times 6 \times 3! = 15 \times 20 \times 3 = 360$
7. contenant **au moins** une consonne :

   Comptons les mots n'ayant aucune consonne : 6^3

   Les autres sont ceux ayant au moins une consonne.

   Il y en a : $26^3 - 6^3 = 17\,360$
8. contenant **au moins** une consonne et une voyelle.

   Il y a

   — $20^3 = 8000$ mots n'ayant que des consonnes ;
   — $6^3 = 216$ mots n'ayant que des voyelles ;

   Aucun n'a été compté deux fois. Tous les autres ont au moins une consonne et une voyelle.

   Il y en a : $26^3 - 20^3 - 6^3 = 9\,360$

Correction de l'exercice I.19 : [Énoncé]

1. On note chaque domino par un nombre à deux chiffres, ou le plus petit numéro figure en premier. Par exemple, 00 ou 35 ou 66.

   Il y a :

   — 7 dominos avec un "blanc" en premier : 00 à 06 ;
   — 6 dominos avec un 1 en premier : 11 à 16 ;
   — ...
   — 1 dominos avec un 6 en premier : 66.

   Au total, il y a $1 + 2 + \cdots + 7 = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$ dominos.

   Le jeu de dominos

00	01	02	03	04	05	06
	11	12	13	14	15	16
		22	23	24	25	26
			33	34	35	36
				44	45	46
					55	56
						66

2. Imaginons qu'on décompose l'expérience en deux étapes : on tire un premier domino, et ensuite un second (sans avoir remis le premier). On peut donc attribuer un ordre aux dominos tirés.

   Par exemple, on tire le 04 puis le 15. On note l'issue correspondant $04 \cdot 15$ L'univers est alors

$$\Omega = \{00 \cdot 01, \cdots, 66 \cdot 56\}$$

	00	01	$\cdots$	56	66
00	×	$00\cdot 01$		$00\cdot 56$	$00\cdot 66$
01	$01\cdot 00$	×		$01\cdot 56$	$01\cdot 66$
$\vdots$					
56	$56\cdot 00$	$56\cdot 01$		×	$56\cdot 66$
66	$66\cdot 00$	$66\cdot 01$		$66\cdot 56$	×

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur Ω d'où $\operatorname{card}\Omega = 28\times 27 = 756$.

On note :

— F:« les deux dominos tirés ont une face commune »

— D_1:« le premier domino tiré est un double »

On a $\mathrm{F} = \mathrm{F}\cap(\mathrm{D}_1\sqcup\overline{\mathrm{D}}_1) = (\mathrm{F}\cap\mathrm{D}_1)\sqcup(\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{D}}_1)$.

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{F}) &= \mathrm{P}\left((\mathrm{F}\cap\mathrm{D}_1)\sqcup(\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{D}}_1)\right)\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{D}_1)+\mathrm{P}(\mathrm{F}\cap\overline{\mathrm{D}}_1)\\ &= \mathrm{P}(\mathrm{D}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1)\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}).\end{aligned}$$

Or,

- $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{\operatorname{card}\mathrm{D}_1}{\operatorname{card}\Omega} = \dfrac{7\times 27}{28\times 27} = \dfrac{1}{4}$.
- $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}_1) = 1-\mathrm{P}(\mathrm{D}_1) = \dfrac{3}{4}$.
- $\mathrm{P}_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{6\times 7}{27\times 7} = \dfrac{6}{27}$
- $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}_1}(\mathrm{F}) = \dfrac{12\times 7}{27\times 7} = \dfrac{12}{27}$

D'où
$$\mathrm{P}(\mathrm{F}) = \frac{1}{4}\times\frac{6}{27}+\frac{3}{4}\times\frac{12}{27} = \frac{7}{18}.$$

Correction de l'exercice I.20 : [Énoncé]

1. $\dfrac{x^2+2|x|}{x} = x+2\dfrac{|x|}{x}$. Si $x>0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x=0$ est $+2$. Si $x<0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x=0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x=0$.
2. $\dfrac{x^2+2|x|}{x} = x+2\dfrac{|x|}{x} = x-2$ pour $x<0$. Donc la limite quand $x\to-\infty$ est $-\infty$.
3. $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$, lorsque $x\to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = \dfrac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = \dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} = 1-\cos(x)$. Lorsque $x\to\pi$ la limite est donc 2.
5. $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}.\\ &= \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$
   Lorsque $x\to 0$ la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\times\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$.
   Lorsque $x\to+\infty$, la limite vaut 0.

I – Corrigé

7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \to 0$, alors $a \to 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Donc si $x \to 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.

La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

9. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x-\alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1})(x-\alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n} = \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha} \times \frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

10. La fonction $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$.

Or $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. Posons $u = \cos(x)$, alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos(x)$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

11.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

12. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

13. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$. Donc pour $y > 0$, $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y} \leqslant 1$.

On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend 1.

On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$.

En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend vers 1.

14.

$$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \longmapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\dfrac{e^2}{5}$.

15. Soit $f(x) = \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \dfrac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4 - \beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2(x)$ est bornée par 1).

Donc le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. La limite vaut donc $+\infty$.

16. $\lim\limits_{x\to\pi} 1 + \cos(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to\pi} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice I.21 : [Énoncé]

La fonction $\varphi : x \longmapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$ avec, $\forall\, x \in \left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x) = \tan^2(x) > 0$ donc elle y est strictement croissante.

Continue, elle y établit donc une bijection entre $\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right[\right) =]-\pi\,;+\infty[$ qui contient 0.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution α telle que $\tan(\alpha) = \alpha$.

Par dichotomie, on trouve $4,49 < \alpha < 4,5$.

Correction de l'exercice I.22 : [Énoncé]

Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le théorème des bornes atteintes. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment.

Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés sur les limites :

$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_1 > 0,\ \forall\, x \geqslant \mathrm{M}_1,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$
$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_2 < 0,\ \forall\, x \leqslant \mathrm{M}_2,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants :

- On doit être sûr que le minimum de f est effectivement atteint dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$,
- et il faut donner une valeur à A pour avoir effectivement des valeurs de M_1 et M_2.

On choisit par exemple $\mathrm{A} = f(0)$. Pour cette valeur de A, la définition de la limite donne les réels M_1 et M_2.

La fonction f est continue sur $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ donc il existe donc $x_0 \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ tel que, pour tout $x \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$, on ait $f(x) \geqslant f(x_0)$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'autre part, si $x > \mathrm{M}_1$ ou si $x < \mathrm{M}_2$, on a $f(x) \geqslant \mathrm{A} = f(0) \geqslant f(x_0)$.

En conclusion, f atteint bien son minimum en x_0.

Correction de l'exercice I.23 : [Énoncé]

1. Sur $]0\,;1[$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;1[\,,\ f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) < 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$. D'après le théorème du même nom, elle établit une bijection de $]0\,;1[$ sur son image.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$, f réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0\,;1[$, sa réciproque l'est également sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)=f^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\right)=f^{-1}(0).$$

Or, $f(x)=0 \iff \dfrac{2x-1}{x(x-1)}=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$.

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice I.24 : [Énoncé]

On note G_i l'événement : « La $i^{\text{ème}}$ personne à descendre est un garçon » et on s'intéresse à l'événement $\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2\cap\mathrm{G}_3\cap\overline{\mathrm{G}_4}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2\cap\mathrm{G}_3\cap\overline{\mathrm{G}_4})&=\mathbf{P}(\mathrm{G}_1)\times\mathbf{P}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)\times\mathbf{P}_{\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2}(\mathrm{G}_3)\times\mathbf{P}_{\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2\cap\mathrm{G}_3}(\overline{\mathrm{G}_4})\\&=\frac{10}{25}\times\frac{9}{24}\times\frac{8}{23}\times\frac{15}{22}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.25 : [Énoncé]

Notons P_1, P_2 et P_3 les portes, P_1 celle que le candidat a choisie.

On note V_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_i l'événement « le présentateur a ouvert la porte i ».

On a :

- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_2)=\mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_3)=\dfrac{1}{2}$,
- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_2)=\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_3)=0$,
- $\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)=\mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_3)=1$.

Ainsi, la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2 est

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{O}_2}(\mathrm{V}_3)&=\frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\mathbf{P}(\mathrm{O}_2)}\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)=\frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{P}(\mathrm{O}_2\cap\mathrm{V}_i)}\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)=\frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{P}(\mathrm{V}_i)\mathbf{P}_{\mathrm{V}_i}(\mathrm{O}_2)}\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\\&=\frac{\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}{\mathbf{P}_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{O}_2)\mathbf{P}(\mathrm{V}_1)+\cancel{\mathbf{P}_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{O}_2)}+\mathbf{P}(\mathrm{V}_2)+\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\mathbf{P}(\mathrm{V}_3)}\mathbf{P}_{\mathrm{V}_3}(\mathrm{O}_2)\\&=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\times 1=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Il est donc plus favorable que le candidat change son choix.

Correction de l'exercice I.26 : [Énoncé]

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$ et de développer cette inégalité.
2. On remarque d'abord que les suites sont bien définies (en particulier, elles sont toujours positives). L'inégalité $u_n\geqslant v_n$ est une conséquence immédiate de la question précédente, avec $x=u_{n-1}$ et $y=v_{n-1}$.

   De plus, on a :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\leqslant\frac{u_n+u_n}{2}\leqslant u_n.$$

De même,
$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{v_n^2} = v_n.$$

3. On sait déjà que $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$. De plus,
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2}.$$
Puisque $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$ et par croissance de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$, on a $\sqrt{u_n v_n} \geqslant v_n$. On en déduit que
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{u_n + v_n - 2v_n}{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - v_n\right).$$
4. De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n, on a
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(u_0 - v_0\right).$$
Ainsi, $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

On en déduit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limite !
5. L'algorithme calcule les termes successifs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce que $u_n - v_n$ <`ecart`.

Par rapport à la définition des suites de l'exercice, on prend juste garde à ce qu'on est toujours $u_n \geqslant v_n$, même au premier rang et on doit faire intervenir une variable supplémentaire pour le calcul successif des termes des suites (car on a une récurrence croisée).

Codé sous Python, ceci donne :

Éditeur
```python
def moyenne(a,b,ecart):
  u=a
  v=b
  while ((u-v)>ecart) :
      w=u
      u=(u+v)/2
      v=math.sqrt(w*v)
  return u,v
```

Correction de l'exercice I.27 : [Énoncé]

1. Il est connu que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $\sin(t) \leqslant t$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient alors successivement :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t \implies 1 - \cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
Puis,
$$\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1 - \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \implies \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$
En conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. D'après les théorèmes généraux et de croissances comparées en 0, la fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Le taux d'accroissement de f dans un voisinage de 0 privé de celui-ci, s'écrit $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.

Or, d'après la question précédente, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$.

D'après le théorème d'encadrement, f est donc dérivable en 0 par valeurs supérieures de nombre dérivé 0.

Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et on a encore $\dfrac{-x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(-x)+x}{x^2} \leqslant 0 \iff 0 \leqslant \dfrac{\sin(x)-x}{x^2} \leqslant \dfrac{x}{6}$.

Le même raisonnement entraine que f est également dérivable en 0 par valeurs inférieures de même nombre dérivé donc elle l'est en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction de l'exercice I.28 : [Énoncé]

1. En ordonnant les sommets dans l'ordre $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$, on obtient

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. On sait que le coefficient (i, j) de M^2 est égal au nombre de chaînes de longueur 2 reliant le sommet i au sommet j.

   Le coefficient situé à la deuxième ligne et à la quatrième colonne vaut

   $$(\mathrm{M}^2)_{2,4} = 4.$$

   Il existe donc 4 chaînes de longueur 2 reliant B à D.

   Les sommets adjacents à la fois à B et à D sont A, C, E et F. Les quatre chaînes recherchées sont donc

   $$\mathrm{B}-\mathrm{A}-\mathrm{D}, \qquad \mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{D}, \qquad \mathrm{B}-\mathrm{E}-\mathrm{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}-\mathrm{F}-\mathrm{D}.$$

   b. Depuis le sommet A, on peut atteindre directement les sommets B, C et D.

   Puis, à partir de B, on peut atteindre les sommets E et F.

   Ainsi tous les sommets du graphe sont accessibles depuis A.

   Le graphe $\mathcal{G}$ est donc connexe.
3. Calculons les degrés des sommets :

   $$\deg(\mathrm{A}) = 3, \qquad \deg(\mathrm{B}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{C}) = 4,$$
   $$\deg(\mathrm{D}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{E}) = 4, \qquad \deg(\mathrm{F}) = 3.$$

   Le graphe est connexe et possède exactement deux sommets de degré impair : A et F.

   D'après le théorème d'Euler, il possède donc une chaîne eulérienne.

   Par exemple : $\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{C}-\mathrm{E}-\mathrm{B}-\mathrm{F}-\mathrm{D}-\mathrm{E}-\mathrm{F}$.

   Cette chaîne parcourt chaque arête exactement une fois.
4. Un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

   Or $\deg(\mathrm{A}) = 3$ et $\deg(\mathrm{F}) = 3$.

   Donc le graphe ne possède pas de cycle eulérien.

   Il suffit d'ajouter l'arête AF pour obtenir

   $$\deg(\mathrm{A}) = 4 \quad \text{et} \quad \deg(\mathrm{F}) = 4.$$

   Tous les sommets ont alors un degré pair et le graphe obtenu possède un cycle eulérien.

5. Pour chaque sommet $\mathrm{S}[i]$, le programme parcourt la ligne i de la matrice d'adjacence.

   Lorsque $\mathrm{M}_{i,j} = 1$, cela signifie que les sommets $\mathrm{S}[i]$ et $\mathrm{S}[j]$ sont adjacents ; le sommet $\mathrm{S}[j]$ est alors ajouté à la liste des voisins de $\mathrm{S}[i]$.

   La fonction renvoie donc la *liste d'adjacence* du graphe.

   Dans le cas du graphe $\mathcal{G}$, elle renvoie :

```
[['B','C','D'],
 ['A','C','E','F'],
 ['A','B','D','E'],
 ['A','C','E','F'],
 ['B','C','D','F'],
 ['B','D','E']]
```

   Chaque sous-liste contient les voisins du sommet correspondant.

Correction de l'exercice I.29 : [Énoncé]

Notons V_k l'événement : « I_k apprend l'information initiale correcte », et $\overline{\mathrm{V}_k}$ l'événement contraire.

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\mathrm{V}_k)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) + \mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\overline{\mathrm{V}_k})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}_k}).$$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\mathrm{V}_k)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) = p$ et $\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}|\overline{\mathrm{V}_k}) = 1-p$, on obtient :

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_{k+1}) = (2p-1)\mathrm{P}(\mathrm{V}_k) + (1-p).$$

La suite $(p_n = \mathrm{P}(\mathrm{V}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche le point fixe qui est $\frac{1}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= (2p-1)p_k + (1-p)\\
\frac{1}{2} &= (2p-1)\frac{1}{2} + (1-p)\\
p_{k+1} - \frac{1}{2} &= (2p-1)\left(p_k - \frac{1}{2}\right)\\
\forall\, n \in \mathbb{N},\ p_n &= (2p-1)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Or, I_0 a l'information donc $p_0 = 1$. Finalement :

$$p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Remarque : Comme $0 < p < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice I.30 : [Énoncé]

1. Soit $k \geqslant 2$. Pour que les deux boîtes soient non vides exactement au tour k, il y a deux possibilités,
   — soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne U et la k-ième boule va dans l'urne V,
   — soit les $k-1$ premières boules vont toutes dans l'urne V et la k-ième boule va dans l'urne U.

   Cela revient à dire que

$$\mathrm{A}_k = (\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) \cup (\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k)\,.$$

Comme l'union est disjointe, on obtient

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = \mathbf{P}(\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) + \mathbf{P}(\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k).$$

Or les boules sont placées indépendamment les unes des autres ce qui veut dire que les évènements $(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_{k-1}, \mathrm{V}_k)$ sont mutuellement indépendants.

De plus, les boîtes sont choisies de manière uniforme donc

$$\mathbf{P}(\mathrm{U}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{U}_{k-1} \cap \mathrm{V}_k) = \mathbf{P}(\mathrm{U}_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(\mathrm{U}_{k-1}) \times \mathbf{P}(\mathrm{V}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

De même, on obtient que

$$\mathbf{P}(\mathrm{V}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{V}_{k-1} \cap \mathrm{U}_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Donc, finalement,

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

2. Notons A l'évènement « Les deux boîtes sont non vides ». Alors, on peut remarquer que

$$\mathrm{A} = \bigcup_{k=2}^{+\infty} \mathrm{A}_k.$$

Or, les évènements $(\mathrm{A}_k)_{k\geqslant 2}$ sont deux à deux incompatibles donc par σ-additivité, la série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$ converge et

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Donc $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 1$, c'est-à-dire l'évènement A est quasi-certain.

Correction de l'exercice I.31 : [Énoncé]

1. Montrons que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$.

En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

De là on tire que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$.

Par équivalence, la série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente.

2. Montrons que $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim n^{-1}$.

On a $\frac{n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n^{-1}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = 1$ et l'équivalence.

La série de terme général $n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ est donc divergente car la série harmonique est divergente.

3. On sait que : $\ln(e^n - 1) \leqslant \ln e^n = n$.

De plus, $\ln n \geqslant 1$ pour n assez grand, par conséquent $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \geqslant \frac{1}{n}$.

On conclut par comparaison des termes généraux de signe positif que la série $\sum \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ est divergente.

4. $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1-\dfrac{1}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e\left(1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}>0.$$

La série de terme général $\dfrac{e}{2n}$ diverge et la série de terme général u_n diverge.

5. $\sim \dfrac{\alpha}{2^{\alpha-1}}\left(e^{\alpha-2}\right)^n \implies$ CV ssi $\alpha<2$.

6. $\sim -\dfrac{3}{n^2} \implies$ CV.

7. $\sim \dfrac{1}{n^2} \implies$ CV.

8. $\sim \sqrt{\dfrac{2}{n^3}} \implies$ CV.

9. CV si, et seulement si $|a|\neq 1$.

10. $\leqslant \dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!} \leqslant \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

    Donc CV.

11. Pour $n\geqslant 4$, $\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{2}{n}\times\dfrac{3}{n}\times\underbrace{\dfrac{4}{n}\times\cdots\times\dfrac{n}{n}}_{\leqslant 1}\leqslant\dfrac{6}{n^2}$.

    Or, $\sum \dfrac{6}{n^2}$ est convergente.

    Donc $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ est aussi convergente par comparaison.

12. Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. $\forall n\geqslant 1$, u_n existe

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

    Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n\geqslant 1$, converge (série de Riemann d'exposant $\alpha>1$), la série de terme général u_n converge.

13. Pour $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$. $\forall n\geqslant 2$, u_n existe et de plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

    Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n\geqslant 2$, diverge et est positive, la série de terme général u_n diverge.

14. Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$. Pour $n\geqslant 1$, $u_n>0$ et

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\ln(n)\ln\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)=\ln(n)\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)\left(-\ln 2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{=}-\ln 2\ln(n)+o(1).\end{aligned}$$

    Donc $u_n=e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ln 2\ln n}=\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$.

    Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n^{\ln 2}}$, $n\geqslant 1$, diverge (série de Riemann d'exposant $\alpha\leqslant 1$) et est positive, la série de terme général u_n diverge.

15. Pour $n\geqslant 1$, on pose $u_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$. u_n existe et $u_n\neq 0$ pour $n\geqslant 1$.

    De plus,

Corrigé

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 < 1.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série de terme général u_n converge.

16. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \times n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} = 0$ donc $n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ...

17. Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)\ln(\operatorname{ch} n)}$. Pour tout $n \geqslant 2$, u_n existe.

    De plus, $\ln(\operatorname{ch} n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^n}{2}\right) = n - \ln 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln(n)} > 0$.

    Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln n}$, $n \geqslant 2$, diverge.

    Donc u_n est positif et équivalent au terme général d'une série divergente.

    La série de terme général u_n diverge.

18. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

    Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et positive et donc, u_n existe et est positif.

    De plus, pour $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n^2+0}\,dx = \frac{\pi}{2n^2}.$$

    La série de terme général $\dfrac{\pi}{2n^2}$ converge et donc la série de terme général u_n aussi.

19. Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\mathrm{S}(n)$. Pour $n \geqslant 2$,

$$0 < \mathrm{S}(n+1) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \times \frac{1}{p^n} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{2}\mathrm{S}(n)$$

    et donc $\forall n \geqslant 2$, $\mathrm{S}(n) \leqslant \dfrac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}}$. Par suite,

$$u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}\frac{\mathrm{S}(2)}{2^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

    Pour tout réel α, la série de terme général u_n converge.

Correction de l'exercice I.32 : [ÉNONCÉ]

1. Trois points à montrer :
   — $v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   — $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   — $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)!} \leqslant 0$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers la même limite.

2. a. $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = e - 1$.

CORRIGÉ

Sur $[0\,;1]$, $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e$ donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{e}{n!}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x = \dfrac{e}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après les théorèmes d'encadrement, $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto \dfrac{x^k}{k!}$ et $x \longmapsto e^{1-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$. Une intégration par parties s'écrit :

$$\mathrm{I}_{k-1} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^k}{k!}e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^k}{k!}e^{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k!} + \mathrm{I}_k.$$

Donc, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \dfrac{1}{k!}$.

c. Il suffit de sommer les égalités précédentes pour k variant de 1 à $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{k-1} - \mathrm{I}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \iff \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_0 = u_n \iff u_n = e - \mathrm{I}_n.$$

Comme $u_0 = 0 = e - \mathrm{I}_0$, cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après les théorème sur les limites de sommes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

3. Par l'absurde supposons que $e = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

On a $u_q \leqslant e \leqslant v_q$ avec u_q est un rationnel qui peut donc s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{N}}{q!}$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$u_q = \frac{\mathrm{N}}{q!} < e = \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!} = \frac{\mathrm{N}}{q!} + \frac{1}{qq!} \text{ ou } \mathrm{N} < p(q-1)! < \mathrm{N} + \frac{1}{q} < \mathrm{N}+1.$$

L'entier $p(q-1)!$ est donc strictement compris entre les deux entiers consécutifs N et $\mathrm{N}+1$. Impossible !

Correction de l'exercice I.33 : [Énoncé]

1. Sur $\mathrm{I} \subset \,]2\,;+\infty[$, comme, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$ est continue, on obtient :

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto \lambda\,\frac{x-1}{\underbrace{x-2}_{>0}},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto ax+b$.

y_p est solution si, et seulement si $a(x^2+2x+5) + ax + b = x^2+3x+5$ *i.e.* $a = 1$ et $b = 0$.

Les solutions générales sur $]2\,;+\infty[$ sont donc de la forme

$$y : x \longmapsto x + \lambda\,\frac{x-1}{x-2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation caractéristique admet 1 comme racine double donc les solutions homogènes sont de la forme

$$y_{\mathrm{H}} : x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,e^x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p : x \longmapsto x^2(ax+b)e^x$.

y_p est solution si, et seulement si $y_p'' - 2y_p' + y_p = xe^x$ avec, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \left(ax^3 + bx^2\right)e^x \\
y_p'(x) &= \left(ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx\right)e^x \\
y_p''(x) &= \left(ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b\right)e^x \\
xe^x &= \left(6ax + 2b\right)e^x \\
&\iff \begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Une solution particulière pourra donc être $y_p : x \longmapsto \dfrac{1}{6}x^3e^x$.

Les solutions générales sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme

$$y : x \longmapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \lambda x + \mu\right)e^x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice I.34 : [Énoncé]

Le nombre de candidats $\mathbb{X}$ réussissant suit la loi binomiale de paramètres 23 et 0,2.

$$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(25; 0,2)$$

En effet, la probabilité de réussite de chaque candidat est la même : 0,2, et la réussite d'un candidat est indépendante de la réussite des autres.

$$\mathrm{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{25}{k}(0,2)^k(0,8)^{25-k}.$$

1. $\mathbf{P}(\mathbb{X} \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = 1 - (0,8)^{25} \simeq 99,6\%$.
2. $$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbb{X} \leqslant 2) &= \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) \\
&= (0,8)^{25} + \binom{25}{1}(0,2)^1(0,8)^{25-1} + \binom{25}{2}(0,2)^2(0,8)^{25-2} \\
&\simeq 9,82\%.
\end{aligned}$$
3. $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 10) = \displaystyle\binom{25}{10}(0,2)^{10}(0,8)^{25-10} \simeq 1,18\%$.
4. D'après le cours, l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(25; 0,2)$ est $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = 25 \times 0,2 = 5$.

– Corrigé