

RAPPELS DE LIMITES USUELLES

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$
- $\forall \alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$
- Si $u_n > 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \ln(u_n) = 0$
- Si $u_n > 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \ln(u_n) = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n n^\alpha = 0$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \ln(n) = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$

I. TECHNIQUE

Exercice I.1

Dans chacun des cas ci-dessous, dire quelle suite réelle est négligeable devant quelle autre.

1. $u = (4)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
2. $u = (\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (5 \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. $u = (n^5)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (e^n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. $u = \left(\frac{5}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = \left(\frac{2}{3^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
5. $u = (n^\alpha e^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\alpha > 0$ et $v = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
6. $u = (3n - 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\frac{n^3 + 3n}{n - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(3n + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (e^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$
9. $u = (n^{\ln(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (\ln(n)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice I.2 – (Compatibilité avec la racine carrée et la valeur absolue)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

1. Montrer que $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.
2. On suppose, de plus, qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Montrer que $\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice I.3 – (Recherche d'équivalents)

Donner un équivalent de la suite réelle u :

1. $u = (n^3 + 3n^2 - 1)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $u = \left(\frac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $u = (-5n^3 - 2n^2 + e)_{n \in \mathbb{N}}$
4. $u = \left(\frac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
5. $u = \left(\frac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
6. $u = (n + \ln(n) + 4^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = (2^n \ln(n) + n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = (\ln(n^2 + 1))_{n \in \mathbb{N}}$
9. $u = \left(\frac{n2^n + 3n^2}{3^n + 5^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
10. $u = \left(7^n - \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right)_{n \geq 2}$
11. u converge vers 1
12. $u = (\ln(n^3 e^{2n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$
13. $u = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
14. $u = (\ln(n+1) - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
15. $u = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$
16. $u = \left(e^{n + \frac{1}{n^2}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
17. $u = \left(n \ln \left(1 + \frac{4}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
18. $u = \left(n \ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) - 2 \right)_{n \geq 3}$
19. $u = \left(\frac{e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1}{n \ln(n)} \right)$
20. $u = \left(\sqrt{1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} - 1 \right)_{n \geq 1}$
21. $u = (\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - \ln(n)))_{n \in \mathbb{N}}$
22. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_n + 2) = 3$
23. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3n^2 + 1 \leq u_n \leq 3n^2 + e^{-n}$
24. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq nu_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$

Exercice I.4 – (Une application de l'équivalence)

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.
3. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire l'existence d'un réel a tel que

$$u_n - 1 = \frac{a}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Exercice I.5 – (Un cas de non équivalence de deux suites réelles remarquables)

On veut montrer que $n!$ et n^n ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

On définit alors la suite u par, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. Conclure après un raisonnement par l'absurde.

Exercice I.6 – (Limite, négligeabilité et équivalence)

Étudier la limite de la suite réelle u dans les cas suivants :

1. $u = (-5n^3 + 2n^2 + e)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $u = \left(\frac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $u = \left(\frac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
4. $u = \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n} + 1} \right)_{n \geq 2}$
5. $u = \left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, 0 < a < b$
6. $u = \left(\frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(\frac{ne^n}{2\ln(n) + \frac{2}{5^n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice I.7

1. Montrer que, pour tout $x \neq \pm 1$, $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$.

II. SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES**Exercice I.8 – (Nature d'une série réelle par télescope)**

Étudier la nature des séries réelles ci-dessous puis calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
4. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$

Exercice I.9 – (Nature d'une série réelle par comparaison et par négligeabilité)

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{n-1}}{n!}$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n}}$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{1 + n!}$
9. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$
10. $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{n^2}}$
11. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
12. $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{\ln(n)}$
13. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$
14. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$
15. $\sum_{n \geq 0} 2^{2n-1} e^{-n}$
16. $\sum_{n \geq 1} n^3 e^{-n}$.

Exercice I.10 – (Nature d'une série réelle par équivalence)

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 + 7}{5n^4 - 2n + 1}$

4. $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$

7. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 e^n}{e^n + n}$

5. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$

8. $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

6. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$

9. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \right).$

Exercice I.11 – (Séries réelles diverses)

1. Étudier l'existence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$ puis calculer sa somme S.

$$\left(\text{On pourra montrer que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right).$$

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$.

Calculer la limite de $n^2 |u_n|$ et en déduire la nature de la série.

3. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{n}$.

4. On considère la suite réelle u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0; \frac{1}{2} \right]$ puis que la suite u converge vers 0.

b. Montrer que la série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ converge et calculer sa somme.

Exercice I.12 – (Compléments sur des convergences de suites réelles)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]0; 1[$. Montrer que la suite $(n^\alpha x^n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in]0; 1[$.

Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k} x^n \right)_{n \geq 1}$ converge vers 0 de deux façons différentes.

4. a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)_{n \geq 1}$.

Exercice I.13 – (Série alternée)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

1. En considérant la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ et ses deux suites extraites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$, montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

2. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ puis majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice I.14 – (Dérivation d'une série de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que $|f_n''|$ soit bornée et telle que, pour tout $x \in I$, les séries de terme général $f_n(x)$, $f_n'(x)$ et $\sup_{t \in I} |f_n''(t)|$ soient convergentes.

On suppose de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}, h+x \in I, |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|.$$

Enfin, on définit alors la fonction S sur I par $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}, h+x \in I$,

$$\left| \sum_{k=0}^n (f_k(x+h) - f_k(x) - hf_k'(x)) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^n \sup_{t \in I} |f_k''(t)|.$$

2. Montrer que $\forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}^*, h+x \in I$,

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|.$$

3. En déduire que S est dérivable sur I et déterminer une expression de S' .

Exercice I.15

Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et démontrer que $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{e}{e-1}$.

III. POUR S'ENTRAÎNER

Exercice I.16 – (Vrai ou faux ?)

- Si deux suites ont même limite, alors elles sont équivalentes.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ ont même nature.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ également.

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ également.

- Si $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

6. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.
7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$, alors il existe un réel $a \in [1; 2]$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n}$.

Exercice I.17 – (Croissances comparées)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire : $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$.

Exercice I.18 – (Suite récurrente d'ordre 1)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1; +\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0; 2]$ est stable par f .
2. Justifier que si un réel x est point fixe de f , alors nécessairement $x \geq 0$.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe et le déterminer. On notera r ce point fixe. Vérifier que $r \in [0; 2]$.
4.
 - a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et r .
 - b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
 - c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
 - d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.

Exercice I.19 – (Suite récurrente d'ordre 1)

Étudier l'existence de la limite et, le cas échéant la déterminer, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Exercice I.20 – (Développement asymptotique d'une suite)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n .
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
5.
 - a. Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(u_n - \frac{1}{n} \right) = -1$.
 - b. En déduire : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^3} \right)$.

Exercice I.21 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

- Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
- Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.
- En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n - \frac{e^{-1}}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Trouver alors un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de I_n .

Exercice I.22 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = nI_n$.

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
- Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$.
- En déduire la limite de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. CONCOURS

Exercice I.23 – (ESC 2001 E)

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 2xe^x$.

- Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
Donner le tableau de variations de f^{-1} .
- Vérifier qu'il existe dans $[0; 1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0; 1]$.
- Montrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) - x \geq 0$; et qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.
 - En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
 - Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser la valeur de sa limite.

- On se propose de déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
- Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.
- En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. On note S sa somme.

Établir : $\alpha \leq S \leq 2$.

- Démontrer finalement : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-S}}{2^n}$.

Exercice I.24 – (EDHEC 2016 E)

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n; +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Étude de f_n .

- Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n; +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n; +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$.
- En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n; +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. Écrire un programme dont l'exécution affiche un entier naturel n pour lequel $u_n - n \leq 10^{-4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
 - Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
 - Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
 - Déduire de l'encadrement obtenu en (b.) que : $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice I.25 – (EDHEC 1997 E)

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - En déduire, lorsque $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.
- A l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction Python approx telle que, pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'exécution de `approx(u(n))` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
- Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.**
 - Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, 1 < u_n < e$.
 - Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 - En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.

En déduire que $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.**
 - Justifier que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ diverge vers $+\infty$.
 - Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Calculer $f_n(n \ln(n))$ puis montrer que $n \ln(n) < v_n$.
 - Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.
 - En déduire : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 - Montrer, enfin, que $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice I.26 – (EDHEC 1998 E)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. Résultats sur la fonction f .

- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.
- Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$.
- En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ puis pour $n = 3$, établir l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

2. Étude d'une suite.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1.
- À l'aide de la question (b.), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis préciser sa limite.
- En déduire la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.
- En utilisant la question (d.), démontrer : $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n^2 .

3. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

On note également g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt$.

- Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.
 - En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.
 - Établir : $\forall x \in]1; +\infty[, \int_1^x \varphi(t) dt \leq \ln(x)$.
 - En déduire que g possède une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.
 - Pour tout réel strictement positif x , calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
 - Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice I.27 – (Type oral)

- Question de cours : Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
- Soit $x \in [0; +\infty[$. Établir la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k + x}$.

On notera $f(x)$ sa somme.

- Calculer $f(0)$.

4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0; +\infty[$.
5. Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x+1}$.
6. Dédire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
7.
 - a. Montrer que pour tous réels positifs x et y , on a : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{3} |x - y|$.
 - b. En déduire que f est continue sur $[0; +\infty[$.