

Remédiation 1

Nature d'une série -- À l'aide de comparaisons

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Quelle est la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n} ?$

2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 + \sin^2(n)} ?$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

⚠ Attention

Il n'y a qu'une seule démonstration en **3** points clés à vérifier !

i Remarque

On peut préciser que c'est la série harmonique ou une série de Riemann pour $\alpha = 1$ mais ce n'est pas le plus important qui est de préciser le signe constant.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} - \forall n \geq 2, \ln(n) \geq 1 \text{ donc } \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}. \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \geq 0 \text{ (ou de signe constant) donc } \frac{\ln(n)}{n} \text{ aussi.} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n} \text{ est divergente.} \end{array} \right.$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

$$2. \left\{ \begin{array}{l} - \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin^2(n) \geq 0 \text{ donc } n^2 + \sin^2(n) \geq n^2 \text{ et } \frac{1}{n^2 + \sin^2(n)} \leq \frac{1}{n^2}. \\ - \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0 \text{ (ou de signe constant) donc } \frac{1}{n^2 + \sin^2(n)} \text{ aussi.} \\ - \text{La série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ est convergente.} \end{array} \right.$$

D'après le critère de comparaison des séries à terme positif, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sin^2(n)}$ est convergente.