

Remédiation 6

Nature d'une série et somme -- À l'aide d'une somme télescopique

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

1. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

💡 Idée

La seule manière pour nous de calculer une somme sont les sommes géométriques, exponentielles ou télescopiques.

📌 À retenir

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

1. Le plus simple ici est de réduire au même dénominateur et d'identifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a}{(n+1)!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{(n+1)a - b}{(n+1)!} = \frac{na + a - b}{(n+1)!}.$$

$$a \text{ et } b \text{ sont donc solutions du système } \begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0. \end{cases}$$

On trouve donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) && \text{d'après la question précédente.} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!} && \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(N+1)!} = 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$