

Rappels d'ECG-1

Lois usuelles

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 5



- 1 Lois finies usuelles
- 2 Lois infinies usuelles



Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.



Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.



Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application.



Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application.

De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.



Rappelons que donner la loi d'une variable aléatoire $\mathbb{X}$ discrète revient à la donnée de :

- $\mathbb{X}(\Omega)$: l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.
- Pour chaque $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k])$.

Dans chacun des cas, on précisera la loi, une représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons, des exemples concrets d'application.

De plus, on distinguera bien

- les cas finis : loi certaine, loi uniforme discrète, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- les cas infinis dénombrables : loi géométrique, loi de Poisson.



I. Loix finies usuelles

1 Loix finies usuelles

- Loi certaine
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Loi uniforme

2 Loix infinies usuelles



I. Loïs finies usuelles

1. Loi certaine



Une variable aléatoire X est certaine si, et seulement si $V(X) = 0$.

Définition 1 – Loi certaine :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi certaine** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :

$$X(\Omega) = \{m\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = m) = 1.$$

On dira aussi que la variable aléatoire X est certaine, égale à m . On parle aussi de variable aléatoire constante, ou de variable déterministe.

Exemple de modélisation : On considère une expérience qui possède une ou plusieurs issues différentes dont une issue se produit avec probabilité 1.

Alors la variable X égale à m si l'issue particulière se produit suit une loi quasi-certaine.



I. Loïs finies usuelles

1. Loi certaine

Exemple 1 – Exemple de modélisation :

On considère des lancers successifs d'un dé à 6 faces non pipé.

On note X la variable aléatoire correspondant à la somme des numéros obtenus sur la face visible du dé et sur sa face opposée.

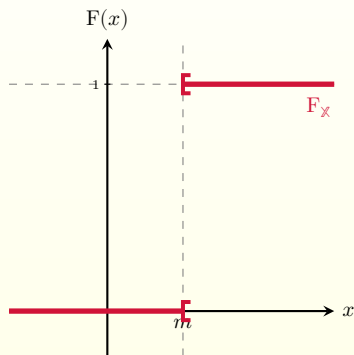
Alors X est une variable aléatoire certaine égale à 7.



I. Lois finies usuelles

1. Loi certaine

Fonction de répartition : X suit la loi certaine telle que $\mathbf{P}(X = m) = 1$ pour $m \in \mathbb{R}$.



I. Loïs finies usuëllës

1. Loi certaine

Proposition 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = m) = 1$.

Alors :

- ➊ Alors X admet une espérance et une variance.



I. Lois finies usuelles

1. Loi certaine

Proposition 1 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète finie suivant une loi certaine (ou quasi-certaine). Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = m]) = 1$.

Alors :

❶ Alors $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.

❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = m \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = 0.$$



I. Loïs finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Remarque

Une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1$ ou $p = 0$ est une variable quasi-certaine.

Définition 2 – Loi de Bernoulli :

Soit $p \in [0; 1]$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = p, \quad \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$



I. Loys finies usuelles

2. Loi de Bernoulli



Pour $A \in \mathcal{A}$ alors la fonction indicatrice 1_A suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$. une variable quasi-certaine.

Définition 2 – Loi de Bernoulli :

Soit $p \in [0; 1]$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \quad \text{et} \quad P([X = 1]) = p, \quad P([X = 0]) = 1 - p.$$

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles peut être appelée expérience de Bernoulli.

L'une des issues est appelée « succès », l'autre « échec ». Le paramètre p correspond à la probabilité de succès, $1 - p$ celle de l'échec.



I. Lois finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemples 2 – Exemples de modélisation :

- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.



I. Loïs finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Exemples 2 – Exemples de modélisation :

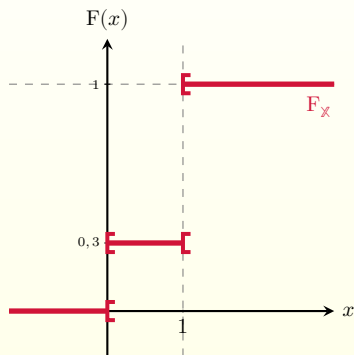
- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.



I. Lois finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(0.7)$.

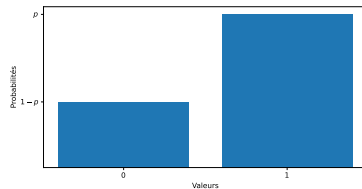


I. Loïs finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Représentation de $\mathcal{B}(p)$:

Ci-contre, le diagramme en bâtons associé à une loi de Bernoulli de paramètre p .



I. Loix finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Alors :

- 1 $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.



I. Loix finies usuelles

2. Loi de Bernoulli

Proposition 2 :

Soit $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Alors :

❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.

❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = p(1 - p).$$



$$\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p).$$

Définition 3 – Loi binomiale :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$



$$\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p).$$

Définition 3 – Loi binomiale :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$.

On dit que $\mathbb{X}$ suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple de modélisation : Toute expérience consistant à effectuer n épreuves de Bernoulli identiques *i.e.* de même paramètre p et indépendantes (le résultat de l'une ne dépend pas du résultat des autres).

Alors la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenus au cours de cette expérience suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .



I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale



Attention

Ne pas oublier la condition de mutuelle indépendance.

Exemple 3 – Exemple de modélisation :

On lance successivement 10 fois un dé équilibré et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de six obtenus.

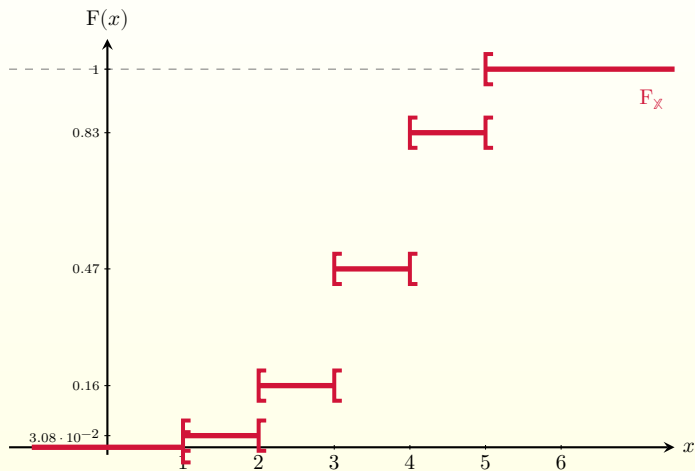
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$.



I. Loïs finies usuelles

3. Loi binomiale

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,7)$.



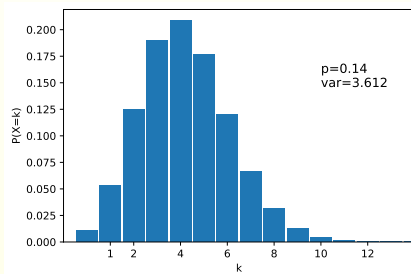
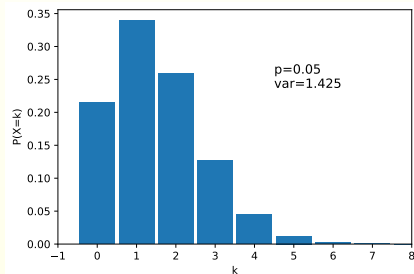
I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$:

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et

$$p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}.$$



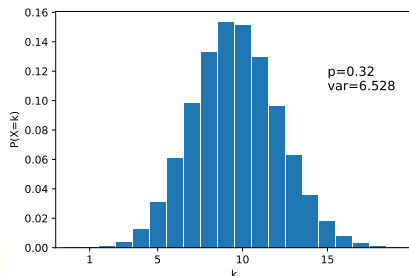
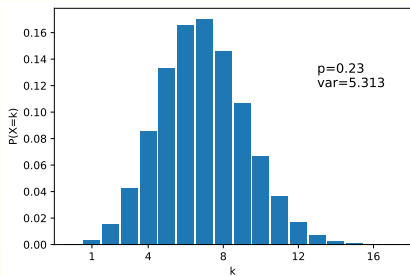
I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$:

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et

$$p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}.$$



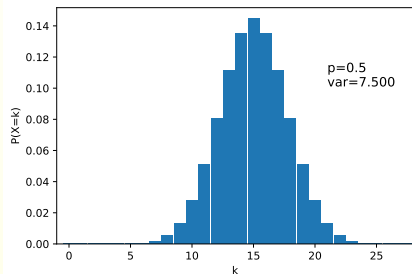
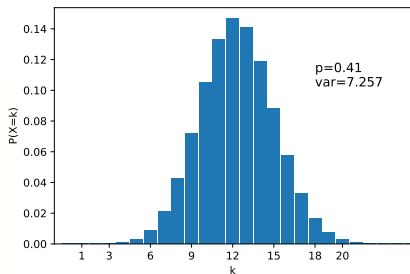
I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale

Représentation de $\mathcal{B}(n; p)$:

Donnons quelques diagrammes en bâtons associés aux lois $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n = 30$ et

$$p \in \{0,05; 0,14; 0,23; 0,32; 0,41; 0,5\}.$$



I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale

Proposition 3 :

Soient $n \geq 1$, $p \in [0; 1]$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.



I. Lois finies usuelles

3. Loi binomiale

Proposition 3 :

Soient $n \geq 1$, $p \in [0; 1]$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors :

❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.

❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = np \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1 - p).$$



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Définition 4 – Loi discrète uniforme :

D1

▪ Soit $n \geq 1$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme** sur $\llbracket 1; n \rrbracket$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$



$$\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1.$$

Définition 4 – Loi discrète uniforme :

D1 ■ Soit $n \geq 1$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme** sur $\llbracket 1; n \rrbracket$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

D2 ■ Plus généralement, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme** sur $\llbracket a; b \rrbracket$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$



$$\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1.$$

Définition 4 – Loi discrète uniforme :

D1 ■ Soit $n \geq 1$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une **loi discrète uniforme** sur $\llbracket 1; n \rrbracket$, noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{n}.$$

D2 ■ Plus généralement, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit une **loi discrète uniforme** sur $\llbracket a; b \rrbracket$, noté $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket a; b \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket a; b \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Remarque : Si $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ avec $n = b - a + 1$, alors

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X} + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket).$$



I. Lois finies usuelles

4. Loi uniforme

Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exemples 4 – Exemples de modélisation :



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exemples 4 – Exemples de modélisation :

- La variable aléatoire X correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$.



I. Loys finies usuelles

4. Loi uniforme

Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exemples 4 – Exemples de modélisation :

- La variable aléatoire X correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$.
- La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ correspond à la loi uniforme sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$.



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Exemple de modélisation : Toute expérience possédant n issues différentes (qu'on numérote de 1 à n) qui sont équiprobables.

Alors la variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue lors de l'expérience suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Exemples 4 – Exemples de modélisation :

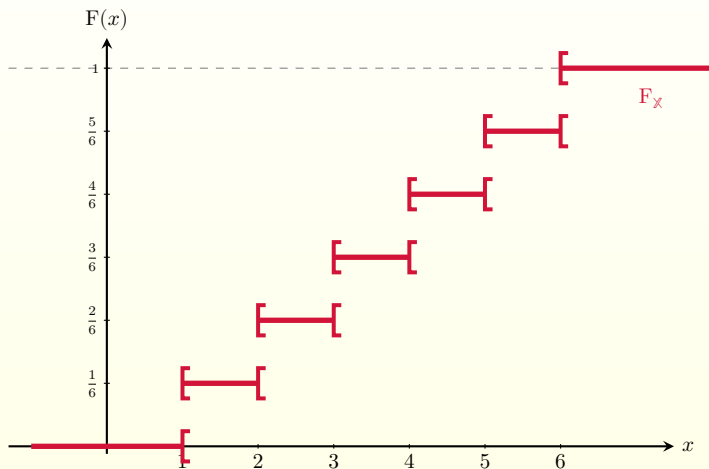
- La variable aléatoire X correspondant au résultat d'un lancer de dé équilibré suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$.
- La loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ correspond à la loi uniforme sur $\llbracket 0; 1 \rrbracket$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$.



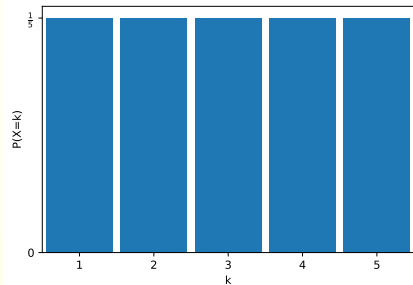
I. Loïs finies usuëllës

4. Loi uniforme

Représentation de $\mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{U}(\llbracket 1; 5 \rrbracket).$$



I. Loïs finies usuelles

4. Loi uniforme

Proposition 4 :

Soient $n \geq 1$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.



I. Loys finies usuelles

4. Loi uniforme

Proposition 4 :

Soient $n \geq 1$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
- ❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{n^2-1}{12}.$$



II. Loix infinies usuelles

1 Loix finies usuelles

2 Loix infinies usuelles

- Loi géométrique
- Loi de Poisson



II. Loïs infinies usuelles

1. Loi géométrique

Remarque

La loi est bien définie puisque les probabilités des événements sont positives et, à partir des résultats sur les séries géométriques :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} p \cdot q^{k-1} &= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\ &= \frac{p}{1-q} = 1.\end{aligned}$$

Définition 5 – Loi géométrique :

Soient $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire $\mathbb{X}$ suit la **loi géométrique** de paramètre p , notée $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p.$$



II. Loïs infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

En effet, posons :

- P_i : « obtenir un succès au $i^{\text{ème}}$ lancer »,



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

En effet, posons :

- P_i : « obtenir un succès au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
- F_i : « obtenir un échec au $i^{\text{ème}}$ lancer ».



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

En effet, posons :

- P_i : « obtenir un succès au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
- F_i : « obtenir un échec au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

Alors $[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$.



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire consistant en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli identiques (même paramètre) et indépendantes

Alors la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier succès obtenu lors de l'expérience suit la loi géométrique de paramètre p .

En effet, posons :

- P_i : « obtenir un succès au $i^{\text{ème}}$ lancer »,
- F_i : « obtenir un échec au $i^{\text{ème}}$ lancer ».

Alors $[X = k] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k$.

Les lancers étant indépendants, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X = k]) &= \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= \mathbf{P}(F_1) \times \mathbf{P}(F_2) \times \dots \times \mathbf{P}(F_{k-1}) \times \mathbf{P}(P_k) \\ &= q^{k-1}p. \end{aligned}$$



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemples 5 – Exemples de modélisation :

- Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.
Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.



II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemples 5 – Exemples de modélisation :

- Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.
Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.
- On lance successivement un dé équilibrée jusqu'à obtenir un six. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer tombé sur six.
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.



II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

Exemples 5 – Exemples de modélisation :

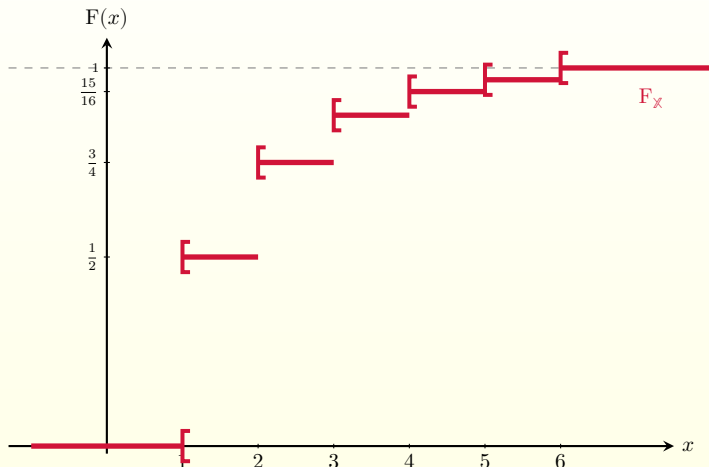
- Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.
Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.
- On lance successivement un dé équilibrée jusqu'à obtenir un six. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du premier lancer tombé sur six.
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.
- On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes.
L'expérience consiste au tirage infini d'une boule avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule rouge.
Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r}{r+v}\right)$.



II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.



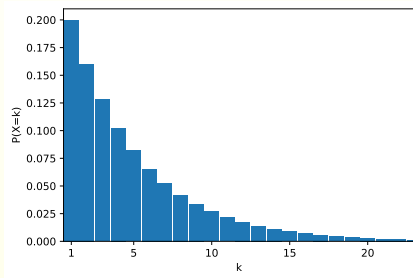
II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

Représentation de $\mathcal{G}(p)$:

Ci-contre le diagramme en bâtons de la loi :

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right).$$



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 5 :

Soient $p \in]0; 1[$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 5 :

Soient $p \in]0; 1[$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
- ❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{1-p}{p^2}.$$



II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

La loi géométrique est aussi caractéristique des **lois sans mémoire**. C'est le propos de la **proposition (6)** :



II. Lois infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 6 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$.
Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\textcircled{i} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = q^k, \text{ où } q = 1 - p.$$



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 6 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$. Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

- ❶ $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = q^k$, où $q = 1 - p$.
- ❷ $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \times \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell])$.



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 6 :

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$. Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

- ❶ $\mathbf{P}([\mathcal{X} > k]) = q^k$, où $q = 1 - p$.
- ❷ $\mathbf{P}([\mathcal{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathcal{X} > k]) \times \mathbf{P}([\mathcal{X} > \ell])$.



II. Loix infinies usuelles

1. Loi géométrique

Proposition 6 :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$. Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

- ❶ $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) = q^k$, où $q = 1 - p$.
- ❷ $\mathbf{P}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > k]) \times \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell])$.

Corollaire 1 – Loi sans mémoire :

Soit $\mathbb{X}$ une variable aléatoire réelle discrète infinie telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0; 1[$. Alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X} > k]}([\mathbb{X} > k + \ell]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > \ell]).$$

On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $\mathbb{X} > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est sans mémoire.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson

i Remarque

La loi est bien définie. Les probabilités sont bien positives et à partir de la série exponentielle

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

Définition 6 – Loi de Poisson :

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$



II. Loix infinies usuelles

2. Loi de Poisson



Ce n'est pas une loi sans mémoire.

Définition 6 – Loi de Poisson :

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exemple de modélisation : Toute expérience aléatoire simulant l'occurrence d'un événement rare au sein d'une très grande population ou dont la probabilité d'apparition sur un intervalle de temps T ne dépend que de la durée de cet intervalle.



II. Loix infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Plus précisément : On considère $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.

On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\quad \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \end{aligned}$$

où $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle . telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Plus précisément : On considère $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.

On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\quad \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}_{\sim 1 \text{ as } n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\sim e^{-\lambda} \text{ as } n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \end{aligned}$$

où $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle . telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.



II. Loix infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Plus précisément : On considère $(\mathbb{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ où $\lambda > 0$.

On a alors, pour tout $k \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{X}_n = k) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &\quad \underbrace{\quad}_{\substack{\sim 1 \\ n \rightarrow +\infty}} \underbrace{\quad}_{\substack{\sim e^{-\lambda} \\ n \rightarrow +\infty}} \underbrace{\quad}_{\substack{\rightarrow 1 \\ n \rightarrow +\infty}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \end{aligned}$$

où $\mathbb{X}$ est une variable aléatoire réelle . telle que $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson



« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021

Exemple 6 – Exemple de modélisation :

- Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.
Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson



« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021

Exemple 6 – Exemple de modélisation :

- Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.
Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.
- On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1,8 accidents par semaine.
La variable aléatoire comptant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute suit une $\mathcal{P}(1,8)$.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson



« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021

Exemple 6 – Exemple de modélisation :

- Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.
Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.
- On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1,8 accidents par semaine.
La variable aléatoire comptant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute suit une $\mathcal{P}(1,8)$.
- On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne 0,8 faute d'impression par page.
La variable aléatoire comptant le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre suit $\mathcal{P}(0,8)$.



II. Loïs infinies usuelles

2. Loi de Poisson



« On a sanctionné les copies dans lesquelles Poisson (ou tout autre mathématicien) était écrit sans majuscule. »
Rapport de Jury HEC 2021

Exemple 6 – Exemple de modélisation :

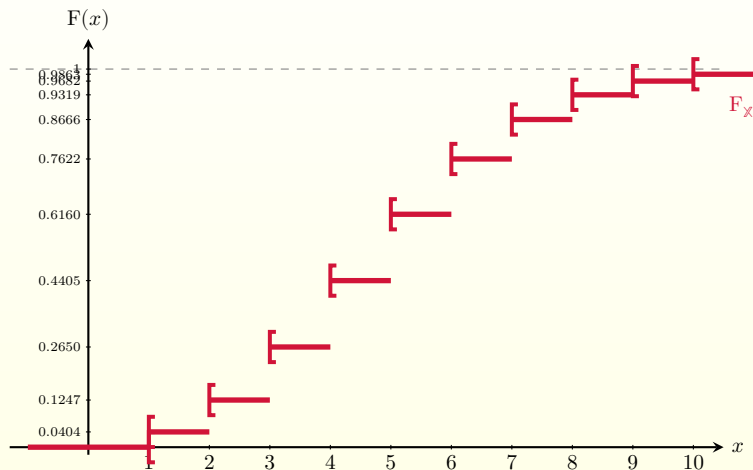
- Si on regarde la probabilité qu'une ampoule donnée grille entre 14h et 15h aujourd'hui, cette probabilité est presque nulle.
Mais si on compte, à Paris, le nombre de d'ampoules qui ont grillé entre 14h et 15h aujourd'hui, on peut simuler ce nombre par une loi de Poisson.
- On considère une autoroute pour laquelle il y a en moyenne 1,8 accidents par semaine.
La variable aléatoire comptant le nombre d'accidents par semaine sur cette autoroute suit une $\mathcal{P}(1,8)$.
- On considère un livre contenant des fautes d'impression. On sait de plus qu'il y a en moyenne 0,8 faute d'impression par page.
La variable aléatoire comptant le nombre de fautes d'impression sur une page de ce livre suit $\mathcal{P}(0,8)$.
- On considère un serveur téléphonique qui reçoit en moyenne trois appels toutes les minutes.
La variable aléatoire comptant le nombre d'appels reçus par le serveur en une minute suit une $\mathcal{P}(3)$.



II. Loix infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Fonction de répartition : $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$.



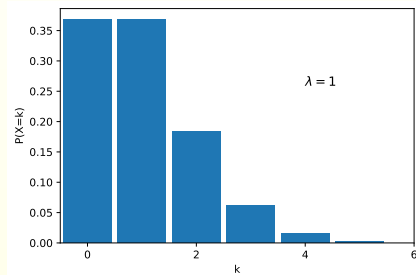
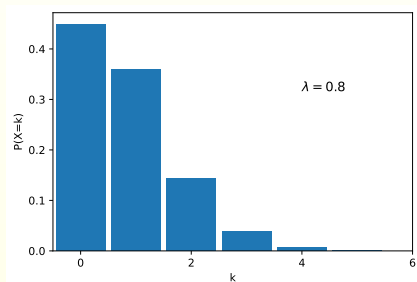
II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$:

Ci-dessous quelques diagrammes en bâtons de la loi :

$\mathcal{P}(\lambda)$ où $p \in \{0, 8; 1; 5; 10\}$.



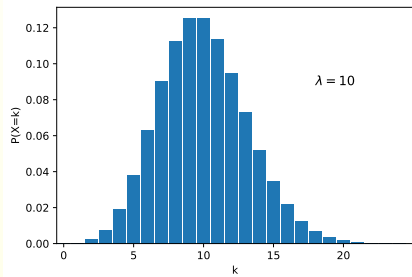
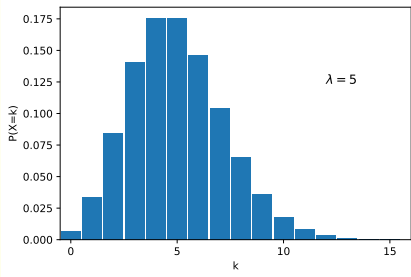
II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Représentation de $\mathcal{P}(\lambda)$:

Ci-dessous quelques diagrammes en bâtons de la loi :

$\mathcal{P}(\lambda)$ où $p \in \{0, 8; 1; 5; 10\}$.



II. Lois infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Proposition 7 :

Soient $\lambda > 0$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors :

- 1 $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.



II. Loix infinies usuelles

2. Loi de Poisson

Proposition 7 :

Soient $\lambda > 0$ et $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Alors :

- ❶ $\mathbb{X}$ admet une espérance et une variance.
- ❷ De plus,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \lambda.$$

