

DM 5

Couple de variables aléatoires

Exercice 1 – (D’après ECRICOME 2023) :

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n .

On tire une boule au hasard dans l’urne. Si cette boule tirée porte le numéro k , on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$, j boules numérotées j , jusqu’à k boules numérotées k .

Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d’une boule dans cette seconde urne.

Et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer $Y(\Omega)$.

3. Soit $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

a. On suppose que l’événement $[X = k]$ est réalisé.

Déterminer, en fonction de k , le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

b. Pour tout entier j de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, exprimer $P_{[X=k]}(Y = j)$ en fonction de k et j .

(On distinguera les cas $j \leq k$ ou $j \geq k + 1$)

4. a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

b. En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,

$$P(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. Justifier que Y admet une espérance^[1] et montrer que $E(Y) = \frac{n+2}{3}$.

6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

7. a. Montrer que $E(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

b. En déduire que $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2-1}{18}$.

Indication : $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

[1]. Comme on ne l’a pas encore bien vu, il suffit juste de prouver que la série $\sum yP(Y = y)$ est finie ou convergente.

8. a. Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `seconde_urne`, prenant en entrée un entier naturel k non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, ..., j éléments valant j , ..., jusqu'à k éléments valant k .

Par exemple, l'appel de `seconde_urne(4)` renverra `[1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4]`.

- b. Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel n non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X, Y) .

```

1 import numpy.random as rd
2 def simul_XY(n):
3     X = ____
4     urne2 = seconde_urne(____)
5     nb = len(urne2)
6     i = rd.randint(0, nb)
7     Y = ____
8     return X, Y

```

- c. On considère la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier naturel n non nul.

```

1 def fonction(n):
2     liste = [0]*n
3     for i in range(10000):
4         j = simul_XY(n)[1]
5         liste[j-1] = liste[j-1] + 1/10000
6     return liste

```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

Exercice 2 – (court extrait d'EM Lyon 2026) :

...

PARTIE B : ÉTUDE DE LA LIGNE DE NIVEAU ZÉRO

On considère la fonction $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.
4. Montrer que la fonction g admet un prolongement continu en 0.

On note encore g le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$.

5. (**khûbe**) Montrer que g est dérivable en 0, et préciser la valeur de $g'(0)$.
6.
 - a. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
 - b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
 - c. Déterminer soigneusement les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser son tableau de variation.