

## Exercice 1

1. Lors du premier tirage, le numéro obtenu est un entier aléatoire compris entre 1 et  $n$  avec équiprobabilité puisque chaque numéro figure sur une seule boule.

La variable aléatoire  $X$  suit donc la loi uniforme sur  $\llbracket 1; n \rrbracket$  :  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ .

Le cours donne par ailleurs l'espérance et la variance de  $X$  :  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

2. D'après la description de l'expérience, la variable aléatoire  $Y$  peut prendre toute valeur entière de 1 à  $k$ , où  $k$  est lui-même un entier qui peut prendre toutes les valeurs de 1 à  $n$ , donc :

$$Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket.$$

3. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

- a) On suppose que l'événement  $[X = k]$  est réalisé. Le nombre total de boules présentes dans la seconde urne est donc :

$$1 + 2 + \dots + k = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2},$$

d'après la formule du cours pour cette somme classique (souvent appelée *somme de Gauss*).

- b) Pour tout  $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$ , toujours sachant que  $[X = k]$  est réalisé, il y a  $j$  boules portant le numéro  $j$  dans l'urne, donc :

$$\text{si } 1 \leq j \leq k, \quad \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}.$$

Par contre si  $j \geq k+1$ , sachant que  $[X = k]$  est réalisé il n'y a aucune boule portant le numéro  $j$  dans la deuxième urne, donc :

$$\text{si } j \geq k+1, \quad \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0.$$

4. a) On cherche ici deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} \iff \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} \iff \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k + a}{k(k+1)}.$$

Par identification des coefficients de mêmes degrés au numérateur, on en déduit que  $a$  et  $b$  vérifient les relations :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -1 \end{cases}, \quad \text{soit : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

b) Soit  $j \in Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$  ; on obtient  $\mathbf{P}(Y = j)$  grâce à la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événement  $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = j) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \quad \text{car } \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = 0 \text{ si } k < j \\ &= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{2j}{n} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) \\ \mathbf{P}(Y = j) &= \frac{2}{n} - \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{2(n+1) - 2j}{n(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

5. La variable aléatoire  $Y$  est finie, donc elle admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=1}^n j \mathbf{P}(Y = j) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j(n+1-j) = \frac{2}{n(n+1)} \left( (n+1) \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left( (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{2}{n(n+1)} \times n(n+1) \left( \frac{n+1}{2} - \frac{2n+1}{6} \right) \\ &= 2 \times \frac{3n+3-2n-1}{6} = \frac{n+2}{3}.\end{aligned}$$

item Il est assez évident que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont *pas* indépendantes, puisque la valeur prise par  $X$  détermine toujours la valeur maximale possible pour  $Y$ .

Plus concrètement, on obtient facilement un contre-exemple dans le cas général, comme celui-ci :

$\mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0$  car si  $X = 1$ , la deuxième urne ne contient qu'une boule numérotée 1, et pourtant  $\mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{n} \times \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \neq 0$  dès que  $n \geq 2$ .

**Remarque :** il y a en fait un seul cas où  $X$  et  $Y$  sont bien indépendantes, lorsque  $n = 1$  : dans ce cas la première urne ne contient que la boule 1 et  $X$  prend forcément la valeur 1 ; la deuxième urne contient alors uniquement une boule 1 également, et  $Y$  est encore constante égale à 1.

6. a) Puisque  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires finies,  $E(XY)$  existe et vaut :

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n kj \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k kj \frac{1}{n} \frac{2j}{k(k+1)} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) = \frac{1}{3n} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (n+1) \times \left( \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}\end{aligned}$$

b) Le couple  $(X, Y)$  admet alors une covariance qui vaut :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n+1}{18} (4n+5-3n-6) \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}.\end{aligned}$$

7. a) On peut proposer ici deux rédactions possibles de la fonction `seconde_urne` :

```
def seconde_urne(k) :
    L = [1]
    for j in range(2,k+1):
        L = L + [j]*j
    return L
```

On peut aussi proposer une version avec une double boucle `for` et la méthode `append` :

```
def seconde_urne(k):
    L = [1]
    for j in range(2,k+1):
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return L
```

- b) La fonction Python suivante prend en entier un entier naturel  $n$  non nul, et renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  :

```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X = rd.randint(1,n+1)    # simulation de la loi uniforme sur  $\llbracket 1;n \rrbracket$ 
    urne2 = seconde_urne(X)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0,nb)
    Y = urne2[i]
    return X,Y
```

Commentaires :

- C'est bien la valeur de  $X$  (notée  $k$  dans la question 3.) qui détermine le contenu de la deuxième urne.
- Il faut bien comprendre que l'entier aléatoire  $i$  est choisi au hasard avec équiprobabilité, dans un ensemble d'entiers tous distincts compris entre 0 et  $\text{len}(\text{nb}) - 1$ , qui correspond au nombre total de boules contenues dans la deuxième urne.

Cet entier  $i$  est donc seulement un indice correspondant à un unique emplacement dans la liste `urne2` dont le contenu respecte bien le nombre de boules pour chaque numéro présent : la valeur de  $Y$  à rendre, est donc bien l'élément de `urne2` à l'emplacement  $i$ , c'est-à-dire `urne2[i]`.

- c) On recopie ici la fonction Python de l'énoncé pour la commenter ensuite :

```
def fonction(n):
    liste = [0]*n
    for i in range(10000):
        j = simul_XY(n)[1]
        liste[j-1] = liste[j-1]+1/10000
    return liste
```

La fonction initialise donc une liste de taille  $n = \text{Card}(Y(\Omega))$ , pleine de zéros au départ.

Ensuite, on réalise 10000 simulations successives du couple  $(X, Y)$  pour cette même valeur de  $n$ , et `j` ne conserve que la deuxième composante (numéro 1) du couple, à savoir la simulation de  $Y$ . L'élément de la variable `liste` d'indice  $j - 1$  (décalage rendu nécessaire par le fait que la numérotation des indices de listes en Python commence à 0 alors que  $Y(\Omega) = \llbracket 1;n \rrbracket$ ), est alors incrémenté de  $1/10000$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1;n \rrbracket$ , l'élément `L[j-1]` de la liste finale rendue par la fonction, contient donc la fréquence d'apparition de  $j$  comme valeur de  $Y$ . Avec une taille d'échantillon de cet ordre de grandeur, on peut considérer que les éléments successifs de la liste rendue permettent d'estimer les probabilités  $(\mathbf{P}(Y = j))_{1 \leq j \leq n}$ .

## DM 5

## Couple de variables aléatoires

## Exercice 2 – (court extrait d'EM Lyon 2026) :

...

## PARTIE B : ÉTUDE DE LA LIGNE DE NIVEAU ZÉRO

On considère la fonction  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

3. Donner le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Correction :** Comme  $\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 \iff u \geq 0$ , on en déduit le tableau de signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}^*$  :

| $x$                    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|------------------------|-----------|-----|-----------|
| $e^{-x} - 1$           | +         | 0   | -         |
| $x$                    | -         | 0   | +         |
| $\frac{e^{-x} - 1}{x}$ | -         |     | -         |

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) \leq 0$ .

4. Montrer que la fonction  $g$  admet un prolongement continu en 0.

**Correction :** En deux étapes :

- Pour tout  $x$  non nul,  $g$  est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc continue sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Comme  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ ,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{x} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$  qui est fini.

La fonction  $g$  admet donc un prolongement par continuité en 0 en posant  $g(0) = -1$ .

**Commentaires :** Le prolongement obtenu est alors continu sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

On note encore  $g$  le prolongement continu de  $g$  à  $\mathbb{R}$ .

5. Montrer que  $g$  est dérivable en 0, et préciser la valeur de  $g'(0)$ .

**Correction :** Pas d'autre méthode que de regarder la limite du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^{-x} - 1}{x} + 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$$

$$\text{Or, } e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2).$$

Donc,  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  puis  $e^{-x} + x - 1 = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ .

On en déduit,  $\frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$ .

La fonction  $g$  est donc dérivable en 0 et on a :  $g'(0) = \frac{1}{2}$ .

6. a. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Correction :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g$  est le quotient deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-xe^{-x} - (e^{-x} - 1)}{x^2} = -\frac{xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x^2}.$$

- b. Montrer que  $g'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

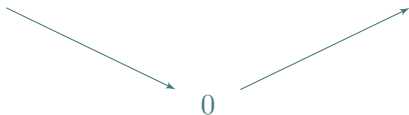
**Correction :** D'après la question précédente, le signe de  $g'(x)$  dépend de celui de

$$\varphi(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1.$$

On étudie rapidement les variations de la fonction  $\varphi$  qui est clairement dérivable comme somme de fonctions qui le sont sur  $\mathbb{R}^*$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x},$$

dont le signe est celui de  $x$ . On en déduit le tableau de variation de  $\varphi$  :

| $x$           | $-\infty$                                                                            | 0 | $+\infty$ |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $\varphi'(x)$ | —                                                                                    | 0 | +         |
| $\varphi$     |  |   |           |

Conclusion,  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(x) > 0$  donc  $g'(x) = -\frac{\varphi(x)}{x^2} < 0$ .

- c. Déterminer soigneusement les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , puis dresser son tableau de variation.

**Correction :**

**En  $+\infty$  :** Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - 1 = -1$ , d'après les théorèmes sur les limites de quotients,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

**En  $-\infty$  :** On a  $g(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ .

Avec  $x$  prenant des valeurs négatives, par croissances comparées, on en déduit,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty.$$

D'après les questions précédentes, on dresse le tableau de variation de  $g$  :

|         |                                                                                |           |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                      | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | +                                                                              |           |
| $g$     | <div><div><math>-\infty</math></div><div><math>0</math></div><div></div></div> |           |

Commentaires : On vérifiera au passage que  $g$  prend bien des valeurs négatives.

