

Remédiation 1

Calcul de sommes (et produits) fini(e)s

I. SOMMES SIMPLES

Rappel – Sommes usuelles :

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \dots + \cancel{u_{n+1}} - \cancel{u_n} + u_{n+1} - \cancel{u_n} = u_{n+1} - u_0.$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Remarque

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Exercice 1 – (Sommes télescopiques) [CORRECTION P. 2]

Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right).$

3. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$

2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$

4. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right).$

Exercice 2 [CORRECTION P. 2]

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n (2k+1).$

2. $\sum_{k=1}^n (k+1)(k+2).$

3. Pour $p < n$, $\sum_{k=p}^n 3^k.$

II. SOMMES DOUBLES

Exercice 3 [CORRECTION P. 3]

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j).$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}.$

Exercice 4 – (Un produit) [CORRECTION P. 3]

Calculer le produits suivant :

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij.$$

Exercice 5 – (Somme triangulaire) [CORRECTION P. 4]Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.**Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]**

- $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1).$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ par décomposition en éléments simples puis télescopage.
- $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k} = \sum_{k=0}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \sqrt{n+1} - \sqrt{0} \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$
- $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}.$

Idée

On commence par multiplier numérateur et dénominateur par la partie conjuguée.

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

- $\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = n(n+1) + n+1 = (n+1)^2.$

Commentaires : Une autre méthode est decrire $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$ et de reconnaître une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2.$$

- Il suffit simplement de développer et d'utiliser les sommes classiques :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + 2 \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\ &= \frac{n}{3}(n^2 + 6n + 11). \end{aligned}$$

- Pour $p < n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n 3^k &= 3^p \sum_{k=p}^n 3^{k-p} = 3^p \sum_{k=0}^{n-p} 3^k \\ &= 3^p \frac{1 - 3^{n-p+1}}{1 - 3} = \frac{3^p}{2} (3^{n-p+1} - 1). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n i + \sum_{j=1}^n j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= n \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times n \\
 &= 2 \frac{n^2(n+1)}{2} \\
 &= n^2(n+1).
 \end{aligned}$$

2. On suppose $x \neq 1$ pour éviter le cas trivial égal à $(n+1)^2$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x^{i+j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(x^i \sum_{j=0}^n x^j \right) && \text{(on factorise par } x^i \text{)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \left(x^i \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \\
 &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sum_{i=0}^n x^i && \text{(on factorise par } \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{)} \\
 &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \\
 &= \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

$$\begin{aligned}
 \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j \right) && \text{(on sort le } i \text{ en facteur de chaque } j \text{)} \\
 &= \prod_{i=1}^n (i^n n!) && \left(\prod_{j=1}^n j = n! \right) \\
 &= (n!)^n \left(\prod_{i=1}^n i^n \right) && \text{(on sort le } n! \text{ en facteur de chaque } i^n \text{)} \\
 &= (n!)^n \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n && (a^n b^n) = (ab)^n \\
 &= (n!)^n (n!)^n && \left(\prod_{i=1}^n i = n! \right) \\
 &= (n!)^{2n}.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

En choisissant astucieusement l'ordre de sommation, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}.\end{aligned}$$