

RAPPELS DE LIMITES USUELLES

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$
- $\forall \alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$
- Si $u_n > 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \ln(u_n) = 0$
- Si $u_n > 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \ln(u_n) = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n n^\alpha = 0$
- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \ln(n) = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0$
- $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$

I. TECHNIQUE

Exercice I.1

Dans chacun des cas ci-dessous, dire quelle suite réelle est négligeable devant quelle autre.

1. $u = (4)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
2. $u = (\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (5 \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. $u = (n^5)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (e^n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. $u = \left(\frac{5}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = \left(\frac{2}{3^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
5. $u = (n^\alpha e^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\alpha > 0$ et $v = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
6. $u = (3n - 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(\frac{n^3 + 3n}{n - 1}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(3n + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = \left(3 - \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (e^{-n})_{n \in \mathbb{N}^*}$
9. $u = (n^{\ln(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (\ln(n)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice I.2 – (Compatibilité avec la racine carrée et la valeur absolue) [CORRECTION P. 11]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

1. Montrer que $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.
2. On suppose, de plus, qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Montrer que $\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Exercice I.3 – (Recherche d'équivalents)

Donner un équivalent de la suite réelle u :

1. $u = (n^3 + 3n^2 - 1)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $u = \left(\frac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $u = (-5n^3 - 2n^2 + e)_{n \in \mathbb{N}}$
4. $u = \left(\frac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
5. $u = \left(\frac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
6. $u = (n + \ln(n) + 4^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = (2^n \ln(n) + n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = (\ln(n^2 + 1))_{n \in \mathbb{N}}$
9. $u = \left(\frac{n2^n + 3n^2}{3^n + 5^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
10. $u = \left(7^n - \left(-\frac{2}{3} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$
11. u converge vers 1
12. $u = (\ln(n^3 e^{2n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$
13. $u = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
14. $u = (\ln(n+1) - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
15. $u = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$
16. $u = \left(e^{n + \frac{1}{n^2}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
17. $u = \left(n \ln \left(1 + \frac{4}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
18. $u = \left(n \ln \left(1 - \frac{2}{n} \right) - 2 \right)_{n \geq 3}$
19. $u = \left(\frac{e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1}{n \ln(n)} \right)$
20. $u = \left(\sqrt{1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} - 1 \right)_{n \geq 1}$
21. $u = (\sqrt{n+1}(\ln(n+1) - \ln(n)))_{n \in \mathbb{N}}$
22. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nu_n + 2) = 3$
23. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3n^2 + 1 \leq u_n \leq 3n^2 + e^{-n}$
24. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq nu_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$

Exercice I.4 – (Une application de l'équivalence) [CORRECTION P. 11]

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.
3. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$, et en déduire l'existence d'un réel a tel que

$$u_n - 1 = \frac{a}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Exercice I.5 – (Un cas de non équivalence de deux suites réelles remarquables) [CORRECTION P. 12]

On veut montrer que $n!$ et n^n ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.

On définit alors la suite u par, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Déterminer la limite de $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.
2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. Conclure après un raisonnement par l'absurde.

Exercice I.6 – (Limite, négligeabilité et équivalence) [CORRECTION P. 13]

Étudier la limite de la suite réelle u dans les cas suivants :

1. $u = (-5n^3 + 2n^2 + e)_{n \in \mathbb{N}}$
2. $u = \left(\frac{2 + n^3 - 8n^5}{3n^5 - 2n^4 + \sqrt{2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$
3. $u = \left(\frac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
4. $u = \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}} \right)_{n \geq 2}$
5. $u = \left(\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, 0 < a < b$
6. $u = \left(\frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
7. $u = \left(\frac{ne^n}{2\ln(n) + \frac{2}{5^n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$
8. $u = \left(\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice I.7 [CORRECTION P. 14]

1. Montrer que, pour tout $x \neq \pm 1$, $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$.

II. SÉRIES NUMÉRIQUES RÉELLES**Exercice I.8 – (Nature d’une série réelle par télescopage) [CORRECTION P. 14]**

Étudier la nature des séries réelles ci-dessous puis calculer leur somme.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
3. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
4. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$

Exercice I.9 – (Nature d’une série réelle par comparaison et par négligeabilité) [CORRECTION P. 15]

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$
5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{n-1}}{n!}$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n}}$
8. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{1 + n!}$
9. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$
10. $\sum_{n \geq 1} e^{\frac{1}{n^2}}$
11. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$
12. $\sum_{n \geq 2} \frac{n}{\ln(n)}$
13. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$
14. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$
15. $\sum_{n \geq 0} 2^{2n-1} e^{-n}$
16. $\sum_{n \geq 1} n^3 e^{-n}$.

Exercice I.10 – (Nature d’une série réelle par équivalence) [CORRECTION P. 15]

Déterminer la nature des séries réelles ci-dessous.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 + 7}{5n^4 - 2n + 1}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 e^n}{e^n + n}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
4. $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$
6. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
7. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
8. $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$
9. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \right).$

Exercice I.11 – (Séries réelles diverses) [CORRECTION P. 16]

1. Étudier l'existence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$ puis calculer sa somme S.

(On pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$).

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$.

Calculer la limite de $n^2 |u_n|$ et en déduire la nature de la série.

3. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$.

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

4. On considère la suite réelle u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ puis que la suite u converge vers 0.

b. Montrer que la série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ converge et calculer sa somme.

Exercice I.12 – (Compléments sur des convergences de suites réelles) [CORRECTION P. 18]

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]0; 1[$. Montrer que la suite $(n^\alpha x^n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in]0; 1[$.

Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k} x^n\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0 de deux façons différentes.

4. a. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right)_{n \geq 1}$.

Exercice I.13 – (Série alternée) [CORRECTION P. 20]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante, à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

1. En considérant la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ et ses deux suites extraites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$, montrer que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

2. Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ puis majorer $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice I.14 – (Dérivation d'une série de fonctions)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que $|f_n''|$ soit bornée et telle que, pour tout $x \in I$, les séries de terme général $f_n(x)$, $f_n'(x)$ et $\sup_{t \in I} |f_n''(t)|$ soient convergentes.

On suppose de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}, h+x \in I, |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| \leq \frac{h^2}{2} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|.$$

Enfin, on définit alors la fonction S sur I par $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}, h+x \in I$,

$$\left| \sum_{k=0}^n (f_k(x+h) - f_k(x) - hf_k'(x)) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^n \sup_{t \in I} |f_k''(t)|.$$

2. Montrer que $\forall x \in I, \forall h \in \mathbb{R}^*, h+x \in I$,

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{t \in I} |f_n''(t)|.$$

3. En déduire que S est dérivable sur I et déterminer une expression de S' .

Exercice I.15

Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et démontrer que $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \frac{e}{e-1}$.

III. POUR S'ENTRAÎNER

Exercice I.16 – (Vrai ou faux ?)

- Si deux suites ont même limite, alors elles sont équivalentes.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$ ont même nature.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ également.
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ également.
- Si $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

7. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$, alors il existe un réel $a \in [1; 2]$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n}$.

Exercice I.17 – (Croissances comparées)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. En déduire : $n! = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^n)$.

Exercice I.18 – (Suite récurrente d'ordre 1)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1; +\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0; 2]$ est stable par f .
2. Justifier que si un réel x est point fixe de f , alors nécessairement $x \geq 0$.
3. Démontrer que f possède un unique point fixe et le déterminer. On notera r ce point fixe. Vérifier que $r \in [0; 2]$.
4.
 - a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et r .
 - b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
 - c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leq \frac{1}{2} |u_n - r|$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - r| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
 - d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leq 10^{-9}$.

Exercice I.19 – (Suite récurrente d'ordre 1)

Étudier l'existence de la limite et, le cas échéant la déterminer, de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Exercice I.20 – (Développement asymptotique d'une suite)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$.

1. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n .
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
5.
 - a. Démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(u_n - \frac{1}{n} \right) = -1$.
 - b. En déduire : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^3} \right)$.

Exercice I.21 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n - \frac{e^{-1}}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Trouver alors un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

6. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de I_n .

Exercice I.22 – (Suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = nI_n$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

3. Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$.

4. En déduire la limite de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. CONCOURS

Exercice I.23 – (ESC 2001 E)

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $\forall x \in [0; 1], f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

Donner le tableau de variations de f^{-1} .

2. Vérifier qu'il existe dans $[0; 1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0; 1]$.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) - x \geq 0$; et qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser la valeur de sa limite.

5. On se propose de déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.

b. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

c. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. On note S sa somme.

Établir : $\alpha \leq S \leq 2$.

d. Démontrer finalement : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-S}}{2^n}$.

Exercice I.24 – (EDHEC 2016 E)

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n; +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. **Étude de f_n .**

- Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n; +\infty[$ puis déterminer $f'_n(x)$ pour tout x de $[n; +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
- En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$.
- En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n; +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. **Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. Écrire un programme dont l'exécution affiche un entier naturel n pour lequel $u_n - n \leq 10^{-4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - n$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
 - Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
 - Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
 - Déduire de l'encadrement obtenu en (b.) que : $u_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice I.25 – (EDHEC 1997 E)

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_n(x) = x - n \ln(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - En déduire, lorsque $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.
- A l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction Python approx telle que, pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$, l'exécution de `approx(u(n))` renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
- Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.**
 - Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, 1 < u_n < e$.
 - Montrer que pour tout $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 - En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$.

En déduire que $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
- Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.**
 - Justifier que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ diverge vers $+\infty$.
 - Soit $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$. Calculer $f_n(n \ln(n))$ puis montrer que $n \ln(n) < v_n$.
 - Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 2 \ln(n)$.
 - En déduire : $\forall n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket, n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 - Montrer, enfin, que $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice I.26 – (EDHEC 1998 E)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. Résultats sur la fonction f .

- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.
- Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$.
- En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ puis pour $n = 3$, établir l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

2. Étude d'une suite.

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1.
- À l'aide de la question (b.), montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis préciser sa limite.
- En déduire la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.
- En utilisant la question (d.), démontrer : $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n^2 .

3. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$.

On note également g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi(t) dt$.

- Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.
 - En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.
 - Établir : $\forall x \in]1; +\infty[, \int_1^x \varphi(t) dt \leq \ln(x)$.
 - En déduire que g possède une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.
 - Pour tout réel strictement positif x , calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.
 - Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Exercice I.27 – (Type oral)

- Question de cours : Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
- Soit $x \in [0; +\infty[$. Établir la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k + x}$.

On notera $f(x)$ sa somme.

- Calculer $f(0)$.

4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0; +\infty[$.
5. Établir : $\forall x \in [0; +\infty[, f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2x+1}$.
6. Dédire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
7.
 - a. Montrer que pour tous réels positifs x et y , on a : $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{3} |x - y|$.
 - b. En déduire que f est continue sur $[0; +\infty[$.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice I.2 : [ÉNONCÉ]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes non nuls telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

1. Montrons que $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

Pour n assez grand, $\frac{|u_n|}{|v_n|} = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$.

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. De plus, $\lim_{X \rightarrow 1} |X| = |1| = 1$ par continuité de la fonction valeur absolue en 1.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = 1$ par composition. D'où $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

2. On suppose, de plus, qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Montrons que $\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Pour n assez grand, $\frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}}$.

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. De plus, $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$ par continuité de la fonction racine carrée en 1.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} = 1$ par composition. D'où $\sqrt{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.

Correction de l'exercice I.4 : [ÉNONCÉ]

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. On raisonne par récurrence pour montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$: « $1 \leq u_n \leq 2$ ».

— $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$ soit $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}_n$ vraie i.e. $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie i.e. $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a $1 \leq u_n \leq 2$ soit $\frac{1}{n+1} \leq \frac{u_n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$ puis $1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{u_n}{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1}$

Il vient alors que $1 \leq 1 + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$ soit $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

(Remarquons que les dernières inégalités ne sont vraies que si $n \in \mathbb{N}^*$; si $n = 0$ alors $\mathcal{P}_n$ vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie)

— En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$.

2. Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 à l'aide d'encadrements.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$ d'après la définition de la suite u . On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_{n-1} \leq 2$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{2}{n}$, soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{2}{n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, par application du théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$.

Ceci équivaut à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) + 1 = 1$.

3. — D'après la définition, $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ et que $1 \neq 0$, on peut affirmer que $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.
De plus, $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ donc par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on aboutit à $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
— On conclut par le lien entre équivalence et négligeabilité,

$$u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \iff (u_n - 1) = \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où l'existence d'un réel $a = 1$ tel que $u_n - 1 = \frac{a}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Correction de l'exercice I.5 : [ÉNONCÉ]

1. **Remarque :** , les théorèmes généraux ne peuvent nous aider à trouver la limite. Nous allons donc utiliser une équivalence.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient l'équivalence $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. De plus, par réflexivité, $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et par compatibilité avec le produit, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n}$ soit $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} e^X = e^1 = e$ par continuité de la fonction exp en 1, on en déduit par composition que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un simple calcul donne :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)(n!)} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n}{n!} \\ &= \frac{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ u_{n+1} &= u_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

- b. Supposons, par l'absurde, que $n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$ i.e. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1$ également.

D'après (I.), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ entraînerait alors, par passage à la limite dans l'équation (I.2), $1 = 1 \times e$ ce qui n'est pas.

On conclut donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1 i.e. ~~$n^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$~~ .

Correction de l'exercice I.6 : [ÉNONCÉ]

1. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -5n^3$ car polynomiale en n , par équivalence de référence.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -5n^3 = -\infty$.

2. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-8n^5}{3n^5} = \frac{-8}{3} \neq 0$ car suite rationnelle en n , par équivalence de référence.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{8}{3}$.

3. $5n^3 + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 5n^3$ par croissance comparée.

Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on aboutit à $\frac{5n^3 + \ln(n)}{ne^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5n^3}{ne^n} = \frac{5n^2}{e^n}$.

Comme $5n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(e^n)$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2}{e^n} = 0$.

4. $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $\sqrt{n^3 - 2n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^3}$.

Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $\frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$.

5. On factorise par la suite qui domine au numérateur et au dénominateur.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n \left(\frac{a^n}{b^n} - 1 \right)}{b^n \left(\frac{a^n}{b^n} + 1 \right)} = \frac{\frac{a^n}{b^n} - 1}{\frac{a^n}{b^n} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0$ par suite géométrique de raison ayant une valeur absolue strictement inférieure à 1, on a $\left(\frac{a}{b} \right)^n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$ et $\left(\frac{a}{b} \right)^n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{1} = -1$.

On conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

6. Pour n assez grand, $u_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$.

— Par compatibilité de l'équivalence avec le produit, au numérateur, on a :

$$n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \frac{1}{n} = n.$$

— Par compatibilité de l'équivalence avec le passage à la puissance, au dénominateur on a :

$$\sqrt{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^2} = n.$$

En conclusion, par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$.

Il vient alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

7. $ne^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} ne^n$ et $2\ln(n) + \frac{2}{5^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\ln(n)$ (le montrer).

Par compatibilité de l'équivalence avec le quotient, on obtient $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ne^n}{2\ln(n)}$.

Comme $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$, on conclut, par produit, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{2} = +\infty.$$

8. Pour n assez grand, $u_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} = e^{2n \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ alors $\ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{n}$ et, par compatibilité de l'équivalence avec le produit,

$$2n \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \frac{5}{n} = 10 \neq 0.$$

L'équivalence ci-dessus conduit à $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right) = 10$.

Comme $\lim_{X \rightarrow 10} e^X = e^{10}$, par continuité de la fonction exp en 10, on conclut par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n \ln\left(1 + \frac{5}{n}\right)} = e^{10}.$$

Correction de l'exercice I.7 : [ÉNONCÉ]

1. Il suffit simplement de réduire au même dénominateur :

$$\forall x \neq \pm 1, \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1 - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 2S_n &= 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc la série converge et on a : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice I.8 : [ÉNONCÉ]

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est donc de même nature que la suite $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Elle est donc divergente (vers l'infini).

On peut préciser :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1).$$

3. De la même manière,

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, v_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

⚠ Attention

Le passage à l'exponentielle n'étant pas compatible avec l'équivalence, nous allons procéder par limite et composition.

💡 Idée

Cette méthode, consistant à se servir de la décomposition en éléments simples est assez générale pour trouver les sommes de séries de terme général une fraction rationnelle.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ est donc de même nature que la suite $\left(\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Comme $\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la série $\sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ converge et on a même :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \ln \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2. \\ \sum_{k=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= -\ln 2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice I.9 : [ÉNONCÉ]

14. — $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ donc $\forall n \geq 2, \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \leq \frac{5}{6}$.

Par croissance des fonctions puissances, $\forall n \geq 2, \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(\frac{5}{6} \right)^n$.

— La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{5}{6} \right)^n$ sont à termes positifs.

— Comme $\left| \frac{5}{6} \right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{5}{6} \right)^n$ converge.

— Par comparaison globale, il vient que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n$ converge également.

15. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n-1}e^{-n} = 2^{-1} \times 2^{2n} \times e^{-n} = 2^{-1} \times (2^2)^n \times \frac{1}{e^n} = 2^{-1} \times \left(\frac{2^2}{e} \right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{e} \right)^n$.

La série $\sum_{n \geq 0} 2^{2n-1}e^{-n}$ est donc une série géométrique de raison $\frac{4}{e} > 1$ donc elle diverge.

16. — Par croissance comparée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5}{e^n} = 0$.

Donc $n^3 e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

— La série $\sum_{n \geq 1} n^3 e^{-n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.

— Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, alors, par négligeabilité, la série $\sum_{n \geq 1} n^3 e^{-n}$ converge également.

Correction de l'exercice I.10 : [ÉNONCÉ]

7. — Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

— La série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs.

— Comme la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (Série de Riemann avec $\alpha \leq 1$), alors, par équivalence, il vient que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ diverge également.

8. — Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, alors $\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{4n}$.

Par produit, on alors $\sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \times \frac{1}{4n} = \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

- La série $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ sont à termes positifs.
 - Comme les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont de même nature et que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($\frac{1}{2} \leq 1$), alors, par équivalence, on peut affirmer que la série $\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$ diverge également.
9. — Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} = 0$, alors $e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$ et donc par produit, $\frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^2}$.
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \right)$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi}{n^2}$ sont à termes positifs.
 - Comme les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont de même nature et que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), alors, par équivalence, on peut affirmer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{\pi}{n}} - 1 \right)$ converge également.

Correction de l'exercice I.11 : [ÉNONCÉ]

1. **Existence de la somme :** La somme existe si et seulement si la série converge.

Or,

- par compatibilité de l'équivalence avec le produit et le passage à l'inverse, $\frac{1}{n(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
- Les séries S et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs.
- La série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$).

Par conséquent, d'après les critères de comparaison sur l'équivalence la série converge. La somme S existe

Décomposition du terme général : On montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ soit par identification, soit en factorisant le membre de droite soit par les limites.

- Le plus simple quand on a le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{n(n+2)} - \frac{n}{n(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+2) - n}{n(n+2)} \right) = \frac{1}{n(n+2)}.$$

- Autres méthodes : on décompose le quotient en éléments simples :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2}.$$

Reste à déterminer les coefficients a et b :

- Par identification : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{a(n+2)}{n(n+2)} + \frac{bn}{n(n+2)} = \frac{a(n+2) + bn}{n(n+2)} = \frac{(a+b)n + 2a}{n(n+2)},$$

ce qui équivaut à

$$1 = (a+b)n + 2a \iff \begin{cases} a+b=0 \\ 2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

— Par usage des limites :

$$a = \lim_{n \rightarrow 0} n \times \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \lim_{n \rightarrow -2} (n+2) \times \frac{1}{n(n+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Dans tous les cas, on trouve le résultat.

Calcul de la somme : Pour calculer la somme, on revient à la définition de la convergence d'une série à savoir on calcule la limite des sommes partielles. Pour N assez grand,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \right) && \text{par linéarité d'une somme finie} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k} \right) && \text{en posant } k = n+2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \right) && \text{en posant } k = n \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{n=1}^2 \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} \right) - \left(\sum_{n=3}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{N+2} \frac{1}{n} \right) \right] && \text{par la relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^2 \frac{1}{n} + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+2} \frac{1}{n} \right] && \text{après simplification par } \sum_{n=3}^N \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{En conclusion, } S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$. c'est une série alternée donc, dans ce cas simple, on regarde s'il y a convergence absolue.

$$\text{— } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 |u_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{\ln(n)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

$$\text{— Pour } n \text{ assez grand, } n^2 |u_n| = \frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}}. \text{ Par conséquent, la limite ci-dessus équivaut à}$$

$$|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

$$\text{— Les séries } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ sont à termes positifs.}$$

$$\text{— La série de Riemann } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge } (2 > 1), \text{ par conséquent la série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |u_n| \text{ converge par négligeabilité i.e. la série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge absolument.}$$

La convergence absolue impliquant la convergence, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^3}$ est convergente.

3. On suppose qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n}\right)$.

D'après l'égalité au voisinage de $+\infty$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n}\right) \iff \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n}\right).$$

Le lien entre équivalence et négligeabilité permet de dire que $\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

- Les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ sont à termes positifs au moins à partir d'un certain rang par équivalence.
- La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge, donc, d'après le critère de comparaison par équivalence, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$ également.

4. On considère la suite réelle u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et $u_0 = \frac{1}{2}$.

a. Montrons que la suite u converge vers 0.

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc la suite u est décroissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n) = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x(1 - x)$.

Une rapide étude la fonction carrée f montre que l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ est stable par f . Comme $u_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, une rapide récurrence montre que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

- La suite u est donc décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de u . Comme la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Équation que l'on résout :

$$\ell = \ell - \ell^2 \iff 0 = -\ell^2 \iff \ell = 0.$$

D'où la limite attendue.

b. Il suffit de reconnaître un télescope :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2 \iff u_n^2 = u_n - u_{n+1}.$$

Pour N assez grand, on a alors :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N u_n^2 = \sum_{n=0}^N u_n - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_{N+1} \end{aligned} \quad \text{par télescope.}$$

$$\text{Or, } \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{N+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 - u_{N+1} = u_0 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{En conclusion, la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice I.12 : [ÉNONCÉ]

1. On va utiliser la définition de la convergence d'une suite vers 0 i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \left| \frac{x^n}{n!} - 0 \right| = \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon.$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq N$. Par exemple, prenez $N = \lfloor x \rfloor + 1$.

$$\text{Pour tout } n \geq N, \text{ on aura alors } \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{N}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &= \left(\frac{|x|}{1} \times \frac{|x|}{2} \times \dots \times \frac{|x|}{N-1} \times \frac{|x|}{N} \right) \times \left(\frac{|x|}{N+1} \times \frac{|x|}{N+2} \times \dots \times \frac{|x|}{n} \right) \\ &\leq \frac{|x|^N}{N!} \times \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N}. \end{aligned}$$

— À x fixé, $\frac{|x|^N}{N!}$ est un réel indépendant de $n \in \mathbb{N}$.

— De plus, $0 \leq \frac{|x|}{N} < 1$ donc, par limite d'une suite géométrique, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N} = 0$.

— Ainsi, pour x fixé, on peut choisir un entier n_0 tel que $n_0 \leq N \Rightarrow \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N} \frac{|x|^N}{N!} \leq \varepsilon$ et donc $\left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon$ par transitivité de $\leq$.

— On a bien montré la convergence de $\left(\frac{x^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0.

2. On revient à la définition :

$$\forall n \geq 1, n^\alpha x^n = e^{\alpha \ln(n)} e^{n \ln(x)} = e^{\alpha \ln(n) + n \ln(x)} = e^{n \left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(x) \right)}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(x) = \ln(x)$ et comme $x \in]0; 1[$, $\ln(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(x) \right) = -\infty.$$

On conclut par composition par exp :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \left(\alpha \frac{\ln(n)}{n} + \ln(x) \right)} = 0.$$

3. **Première méthode :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in]0; 1[$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \dots \times 2 \times 1}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}, \end{aligned}$$

par produit car $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, n-i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

D'après (2.), la suite $(n^k x^n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 donc de même pour la suite

$\left(\binom{n}{k} x^n \right)_{n \geq 1}$ par équivalence.

Deuxième méthode : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in]0; 1[$.

En revenant à la définition de $\binom{n}{k} x^n$, on a aussi :

$$0 \leq \binom{n}{k} x^n \leq \frac{n^k}{k!} x^n.$$

Il ne reste qu'à appliquer le théorème d'encadrement et le résultat du (2.) pour trouver la limite souhaitée.

i Remarque

Ce résultat est cohérent avec la condition nécessaire de convergence car la série exponentielle converge.

4. a. Des études de fonction permettent de démontrer les deux inégalités, en posant par exemple,

$$f : x \mapsto x - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Il suffit de montrer alors que f et g sont deux fonctions positives.

- b. Pour la limite de la suite $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right)_{n \geq 1}$, on passe par la fonction $\ln$ afin de transformer le produit en somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

D'après les inégalités de (A.),

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}.$$

On a ainsi, par somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k\right) - \frac{1}{2n^4} \left(\sum_{k=1}^n k^2\right) \leq \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k\right)$$

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{2n^4} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \leq \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ par limite d'une suite rationnelle (ou par équivalence et compatibilité avec un quotient).

On en déduit par le théorème d'encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{2}.$$

En passant à l'exponentielle et par continuité de celle-ci en $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \right) = \sqrt{e}.$$

Correction de l'exercice I.13 : [ÉNONCÉ]

1. On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

— Montrons que la suite $(S_{2n})_{n \geq 0}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k u_k \right) - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+1} + u_{2n+2}. \end{aligned}$$

En effet, $2n+1$ est impair et $2n+2$ est pair, donc $(-1)^{2n+1} = -1$ et $(-1)^{2n+2} = 1$.
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ par décroissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que la suite $(S_{2n})_{n \geq 0}$ est bien décroissante.

— Montrons, de même, que la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ est croissante.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k + \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k u_k \right) - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{k=2n+2}^{2n+3} (-1)^k u_k = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3}. \end{aligned}$$

En effet, $2n+3$ est impair et $2n+2$ est pair, donc $(-1)^{2n+3} = -1$ et $(-1)^{2n+2} = 1$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$ par décroissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ est bien croissante.

— De plus,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \right) - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= u_{2n+1}. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$, on peut affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$.

Les trois points ci-dessus démontrent que les suites extraites d'indices pairs et impairs $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite et on a (d'après une propriété de ECG1) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

En conclusion, la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

2. En notant $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n u_n$ et tenant compte des variations des suites $(S_{2n})_{n \geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}.$$

— Cas pair : Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k = S - S_{2n}$.

Il vient alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1}$$

car $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

Or, $S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+1}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n}| \leq u_{2n+1}$.

— Cas impair : De la même façon, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k u_k = S - S_{2n+1}$.

Il vient alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1}$$

car $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$.

Or, $S_{2n+2} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n+1}| \leq u_{2n+2}$.

En conclusion, dans tous les cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq u_{n+1}$.

3. La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est de la forme $(-1)^n u_n$ avec la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Les hypothèses sont donc vérifiées pour appliquer les résultats précédents :

La série alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$