

Remédiation 8

Nature d'une série et somme -- Séries alternées

Commentaires : C'est un grand classique des concours en marge du programme. À savoir faire donc !

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite s et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la même limite s .
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente de somme s .
4. **Application :** Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= \cancel{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k} \\ &= -a_{2n+1} + a_{2n+2}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$ donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 : \text{ la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Le raisonnement est identique pour la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

À retenir

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si, et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Attention

L'indice $2n$ devient $2n+2$ lorsqu'on remplace n par $n+1$.

Idée

$$\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^{2n+1} = -1 \text{ et } (-1)^{2n} = 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\ &= \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+3}. \end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$ donc

$$v_{n+1} - v_n \geq 0 : \text{ la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

2. Grâce aux variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_0 \leq v_n \quad \text{et} \quad u_n \leq u_0.$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, v_n - u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1}.$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite de réels strictement positifs, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq 0 \iff v_n \leq u_n.$$

En conclusion, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0.$$

La suite

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par v_0 ,
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par u_0 ,

donc elles convergent d'après le théorème de convergence monotone respectivement vers s_u et s_v .

$$\text{Or, } v_n - u_n = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par passage à la limite (autorisé car les suites sont convergentes), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 \iff s_v - s_u = 0 \iff s_u = s_v.$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite s .

3. **Commentaires :** Pas d'autre choix que de revenir à la définition.

Globalement, comme les deux suites extraites d'indices pairs et impairs de la suite $\left(s_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (-1)^{n-k} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, cela va être le cas de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit I un intervalle ouvert contenant s .

— Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s , il existe un rang $N_u \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_u, \quad s_{2n} \in I.$$

— Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s , il existe un rang $N_v \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_v, \quad s_{2n+1} \in I.$$

Posons $N = \max(2N_u, 2N_v)$. Soit $n \geq N$:

Méthode
 $a \leq b \iff a - b \leq 0.$

À retenir
 Le théorème de convergence monotone : « tout suite monotone bornée converge. »

Remarque
 On ne sait pas encore que $s_u = s_v$.

- Si n est pair ($n = 2k$), alors $2k \geq 2N_u \Rightarrow k \geq N_u$, donc $s_n = s_{2k} \in I$.
- Si n est impair ($n = 2k + 1$), alors $2k + 1 \geq 2N_v \Rightarrow k \geq N_v$, donc $s_n = s_{2k+1} \in I$.

On en déduit :

$$\boxed{\forall n \geq N, \quad s_n \in I}$$

Ainsi, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s i.e.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n \text{ est convergente vers } s.}$$

4. Il s'agit juste d'appliquer le résultat que l'on vient de démontrer :

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \frac{1}{n+1}$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

D'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente $\left(\text{vers } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$.