

Remédiation 9

Suites récurrentes -- Avec l'IAF

Exercice 1 [CORRECTION P. 1]

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 2]$. En déduire que $[0; 2]$ est stable par f .
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
3. Déterminer les points fixes de f sur $[0; 2]$. Notons α l'unique point fixe de f dans $[0; 2]$.
4. Montrer que : $\forall x \in [0; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
7. Enfin, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq 2\frac{2}{9^n}$.
8. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
9. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-4} près, obtenue en calculant le terme u_n d'indice minimal tel que $\frac{2}{9^n} \leq 10^{-4}$.

```

1  def valeur_approchees():
2      u = ...
3      n = ...
4      while ... :
5          u = ...
6          n = ...
7      return u

```

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. Pour tout $x \in [0; 2]$, $x+3 \neq 0$ donc la fonction f quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas est également dérivable sur $[0; 2]$ et on a :

$$\forall x \in [0; 2], f'(x) = \frac{(x+3) - (x+2)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; 2]$ et on en déduit son tableau de variations :

x	0	2
$f'(x)$	—	
f	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$

Comme $0 \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{4}{7} \leq 2$, on en déduit que $f([0; 2]) = [\frac{2}{3}; \frac{4}{7}] \subset [0; 2]$. L'intervalle $[0; 2]$ est stable par f .

2. Comme $u_0 \in [0; 2]$ qui est stable par f , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 2]$ i.e. $0 \leq u_n \leq 2$.

Commentaires : Si jamais cela vous semble trop court, on peut aussi le montrer par récurrence :

Initialisation : D'après l'énoncé, $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n \leq 2$ i.e. $u_n \in [0; 2]$.

D'après la question précédente, $[0; 2]$ est stable par f donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 2]$ i.e. $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ et l'hérédité.

Synthèse : Initialisée à partir de $n = 0$ et héréditaire, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

3. Soit $x \in [0; 2]$.

On résout

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} = x \\ &\Leftrightarrow x+2 = x(x+3) & (x \neq -3) \\ &\Leftrightarrow x+2 = x^2+3x \\ &\Leftrightarrow x^2+2x-2 = 0 \end{aligned}$$

Avec $\Delta = b^2 - ac = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$, on trouve deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Comme $x_2 \notin [0; 2]$, la fonction f admet un unique point fixe $\alpha = x_1 = -1 + \sqrt{3}$ dans $[0; 2]$.

4. Pour tout $x \in [0; 2]$, $x+3 \geq 3$, donc

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x+3)^2} \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

5. La fonction f est dérivable sur $[0; 2]$ qui est stable et, d'après la question précédente, $\forall x \in [0; 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{9}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre u_n et α :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et propriété de α , on a finalement :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

6. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ».

Remarque

Il est très important de dire où on résout l'équation. Cela permet ensuite d'éliminer les points fixes en trop.

Attention

Ne pas oublier de dire que f est dérivable sur l'intervalle considéré !

Initialisation : Comme $\left(\frac{1}{9}\right)^0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est un tautologie (toujours vraie) car

$$|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^0 |u_0 - \alpha|.$$

Commentaires : $\mathcal{P}(1)$ découle de l'inégalité des accroissements finis entre u_0 et α :

$$|f(u_0) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |u_0 - \alpha|.$$

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et propriété de α , on a finalement :

$$|u_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^1 |u_0 - \alpha| \text{ qui est } \mathcal{P}(1).$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

En remplaçant, on obtient :

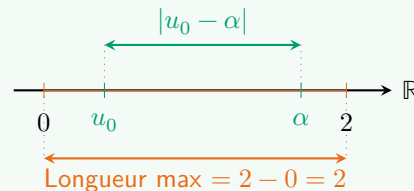
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

7. Comme u_0 et α appartiennent tous deux à l'intervalle $[0; 2]$, leur distance est inférieure à 2 :



Donc $|u_0 - \alpha| \leq 2$ et, en remplaçant dans l'inégalité de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq 2 \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

8. Comme $0 \leq \frac{1}{9} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers α .

9.

```

1  def valeur_approchees():
2      u = 0
3      n = 0
4      while 2/(9**n) > 10**(-4) :
5          u = (u+2)/(u+3)
6          n = n+1
7      return u

```

Idée
N'oubliez jamais que $\mathcal{P}(n+1)$ n'est vraie que sous l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Commentaires : Tant que $2/(9^{**}n)$ est strictement plus grand que $>10^{**}(-4)$, on calcule les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u = (u+2)/(u+3)$ et on incrémente la valeur de n avec $n = n+1$.

La fonction `def valeur_approchees()` renvoie la valeur de u mais on peut écrire aussi `return u, n` et on aura alors la valeur du plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

On trouve $\alpha = 0,7320$ et $n = 5$.