

Remédiation 22

Loi d'une somme

Exercice 1 – (Somme de lois de Poisson) [CORRECTION P. 2]

Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2 – (Somme de lois binomiales) [CORRECTION P. 2]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 3 – (Somme de lois géométriques) [CORRECTION P. 3]

Soient $p \in]0; 1[$ et $q \in]0; 1[$ deux réels distincts.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 4 – (Somme de lois uniformes) [CORRECTION P. 4]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Commentaires : Ces exercices sont tous les mêmes. La rédaction est donc fortement similaire :

1. On commence par déterminer le support de la loi Z :

	$X(\Omega)$	$Y(\Omega)$	$Z(\Omega)$
Exercice 1	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
Exercice 2	$[0; n]$	$[0; m]$	$[0; n + m]$
Exercice 3	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$[2; +\infty[$
Exercice 4	$[1; n]$	$[1; n]$	$[2; 2n]$

2. On détermine $\mathbf{P}(Z = k)$ grâce à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X , c'est-à-dire la famille $([X = i])_{i \in X(\omega)}$ pour un $k \in Z(\Omega)$.

On commencera donc toujours par calculer :

Soit $k \in Z(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}([X + Y = k]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X + Y = k] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([Y = k - i] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([Y = k - i])\mathbf{P}([X = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &\quad \dots \text{la suite dépend des lois considérées.}
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=0}^k \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{car } k - i \geq 0 \iff k \leq i) \\
 &= \sum_{i=0}^k e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^k \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{k!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

La somme de deux lois de Poisson de paramètres λ et μ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 0; m + n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0; m + n \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{m+n-k} \\
 &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} \\
 \text{Or, } \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} &= \binom{m+n}{k} : \\
 \text{Donc, } \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}.
 \end{aligned}$$

La somme de deux lois binomiales de paramètres n, p et m, p est une loi binomiale de paramètre $m + n, p$.

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ](#)

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (k - i \geq 1 \iff i \leq k - i) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} q(1 - q)^{k-i-1} p(1 - p)^{i-1} \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1}}{1 - p} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^i \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1}}{1 - p} \frac{1 - p}{1 - q} \frac{1 - \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^{k-1}}{1 - \frac{1 - p}{1 - q}} \quad \left(p \neq q \text{ donc } \frac{1 - p}{1 - q} \neq 1 \right) \\
 &= pq(1 - q)^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^{k-1}}{p - q} \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1} - (1 - p)^{k-1}}{p - q}.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 2; 2n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq k-i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i])
 \end{aligned}$$

Or, $1 \leq k - i \leq n \iff k - n \leq i \leq k - 1$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k-n \leq i \leq k-1}} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k-i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k-n \leq i \leq k-1}} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{i=\max(1, k-n)}^{\min(n, k-1)} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} (\min(n, k-1) - \max(1, k-n) + 1)
 \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

Premier cas : $k \geq n+1$: Alors $\min(n, k-1) = n$ et $\max(1, k-n) = k-n$ puis

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{n^2} (n - (k-n) + 1) = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

Deuxième cas : $k \leq n$: Alors $\min(n, k-1) = k-1$ et $\max(1, k-n) = 1$ puis

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{n^2} (k-1 - 1 + 1) = \frac{k-1}{n^2}.$$

Et on remarque que les deux formules coïncident pour $k = n+1$.

En conclusion,

$$\forall k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \begin{cases} \frac{2n - k + 1}{n^2} & \text{si } k \geq n+1 \\ \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leq n. \end{cases}$$