

Remédiation 23

Loi de $X = Y$ **Exercice 1 – (Loi de l'égalité de deux lois uniformes)** [CORRECTION P. 1]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $X = Y$.

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

On a $X(\Omega) = [1; n]$ et $Y(\Omega) = [1; n]$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X , c'est-à-dire la famille $([X = k])_{k \in [1; n]}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([X = Y]) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = Y] \cap [X = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([Y = k] \cap [X = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([Y = k])\mathbf{P}([X = k]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\
 &= n \times \left(\frac{1}{n} \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$