

Khôlles 4

Variables aléatoires, Lois usuelles & Couples

1. QUESTIONS DE COURS (AU CHOIX DE L'INTERROGATEUR)

Variables aléatoires réelles, Espérance & Variance

1. Support et loi de probabilité

- Définir le support $\mathbb{X}(\Omega)$ d'une variable aléatoire réelle discrète et donner la définition de sa loi de probabilité.
- Expliquer la méthode en deux étapes pour déterminer la loi d'une variable aléatoire.

Lois usuelles (Finies et Infinies)

2. Lois usuelles finies

- Définir la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Donner leurs espérances et variances.
- Définir la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et énoncer ses formules d'espérance et de variance.

3. Lois usuelles infinies

- Définir la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Démontrer la formule de son espérance ou de sa variance.
- Définir la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Rappeler la formule de sa loi ainsi que son espérance et sa variance.

4. (khûbe) Propriété de la loi géométrique

- Énoncer et démontrer la propriété de perte de mémoire de la loi géométrique

$$P_{[\mathbb{X} > k]}(\mathbb{X} > k + l) = P(\mathbb{X} > l).$$

Couples de variables aléatoires discrètes

5. Définition de la loi conjointe

- Définir le support $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})(\Omega)$ d'un couple de variables aléatoires discrètes.
- Définir la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

6. Obtention des lois marginales

- Énoncer le système complet d'événements associables à la variable $\mathbb{Y}$ (ou $\mathbb{X}$).
- (khûbe) Énoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{X}$ à partir des probabilités conjointes.

7. Loi de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$

- Donner la condition d'existence de la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$.
- Rappeler la formule de $P_{[\mathbb{X}=x]}(\mathbb{Y} = y)$ et vérifier que la somme des probabilités
- Donner démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{Y}$ à partir de sa loi sachant $[\mathbb{X} = x]$.

8. Indépendance de deux variables aléatoires

- Définir l'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y .
- Énoncer les propriétés sur $E(XY)$ et $V(X + Y)$ en cas d'indépendance.

2. EXERCICES TYPES & SAVOIR-FAIRE ATTENDUS

Exercice 1 – (Calcul de loi marginale à partir d'un tableau conjoint) [CORRECTION P. 4]

Soit (X, Y) un couple à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ vérifiant $P([X = i] \cap [Y = j]) = a(i + j)$.

- Déterminer la constante a .
- Dresser le tableau à double entrée de la loi conjointe.
- En déduire les lois marginales de X et Y .

Exercice 2 – (Compléter un tableau à double entrée) [CORRECTION P. 4]

On considère un couple (X, Y) à valeurs dans $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$ dont la loi conjointe est donnée par $P([X = i] \cap [Y = j]) = c \times i \times j$.

- Déterminer la valeur de la constante c .
- Dresser le tableau de la loi conjointe et calculer les sommes en marge.
- En déduire les lois marginales de X et de Y .

Exercice 3 – (Probabilités totales et conditionnement (Mélange Uniforme / Binomiale)) [CORRECTION P. 5]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note X son numéro. Puis, on lance X fois une pièce équilibrée et on note Y le nombre de "Pile" obtenus.

- Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
- Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
- Calculer $P(Y = 0)$ à l'aide de la Formule des Probabilités Totales.

Exercice 4 – (Loi d'un couple relié par une relation déterministe) [CORRECTION P. 5]

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ dont la loi est donnée par :

$$P(X = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

On pose $Y = X^2$.

- Déterminer le support $Y(\Omega)$ et donner la loi marginale de Y .
- Dresser le tableau de la loi conjointe du couple (X, Y) .
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $E(XY)$.

Exercice 5 – (Loi conjointe produit et indépendance de lois usuelles) [CORRECTION P. 5]

Soient $B \sim \mathcal{B}(p)$ et $G \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables aléatoires indépendantes avec $p \in]0, 1[$. On pose $Z = B \times G$.

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable Z .

2. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0)$ en utilisant un système complet d'événements lié à $\mathbb{B}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k)$.
4. (**khûbe**) Calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de deux manières différentes.

Exercice 6 – (Tirages sans remise et lois marginales identiques) [CORRECTION P. 6]

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). On tire successivement et sans remise deux boules. On note $\mathbb{X}_1$ le numéro de la première boule et $\mathbb{X}_2$ celui de la deuxième.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}_1$, son espérance et sa variance.
2. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, déterminer la probabilité conjointe $\mathbf{P}([\mathbb{X}_1 = i] \cap [\mathbb{X}_2 = j])$.
3. En déduire la loi marginale de $\mathbb{X}_2$.
4. Les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 – (Couple de variables aléatoires indépendantes à support infini) [CORRECTION P. 6]

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+1} \times 3^{j+1}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que $a = 2$.
2. Reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ (à un décalage près).
3. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

Exercice 8 – (Théorème de transfert (Loi géométrique)) [CORRECTION P. 6]

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}$.

1. Rappeler le support et l'espérance de $\mathbb{X}$.
2. Calculer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert et de la somme d'une série géométrique.

Exercice 9 – (Somme et indépendance de deux lois de Poisson) [CORRECTION P. 7]

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux variables aléatoires indépendantes.

1. Rappeler $\mathbf{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$.
2. Démontrer, en utilisant un système complet d'événements et le binôme de Newton, que $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 10 – (Maximum et Minimum de deux tirages avec remise) [CORRECTION P. 7]

On tire avec remise deux boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les numéros obtenus.

1. Justifier l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et rappeler leurs lois.
2. Soit $\mathbb{M} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k)$ puis en déduire la loi de $\mathbb{M}$.
3. Soit $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ puis donner la loi de $\mathbb{T}$.

CORRIGÉS

Correction de l'exercice 1 : [ÉNONCÉ]

1. La somme des probabilités conjointes sur tout le support doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a(i+j) = 1$$

Calculons la somme :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (i+j) = (2+3+4) + (3+4+5) + (4+5+6) = 9+12+15 = 36$$

D'où $36a = 1$, soit $a = \frac{1}{36}$.

2. En remplaçant a par $\frac{1}{36}$, on obtient le tableau de la loi conjointe :

$X \backslash Y$	1	2	3	Loi de X
1	2/36	3/36	4/36	9/36
2	3/36	4/36	5/36	12/36
3	4/36	5/36	6/36	15/36
Loi de Y	9/36	12/36	15/36	1

3. En faisant la somme par ligne et par colonne :

— Loi de X : $\mathbf{P}(X=1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}(X=2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(X=3) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

— Loi de Y : Par symétrie de la formule $a(i+j)$, la loi marginale de Y est identique à celle de X :

$$\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(Y=2) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(Y=3) = \frac{5}{12}.$$

Correction de l'exercice 2 : [ÉNONCÉ]

1. La somme totale des probabilités est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c \times i \times j = c \left(\sum_{i=1}^2 i \right) \left(\sum_{j=1}^3 j \right) = 1$$

On a $\sum_{i=1}^2 i = 1+2 = 3$ et $\sum_{j=1}^3 j = 1+2+3 = 6$.

Donc $c \times 3 \times 6 = 18c = 1$, d'où $c = \frac{1}{18}$.

2. Le tableau de la loi conjointe avec les marges :

$X \backslash Y$	1	2	3	Loi de X
1	1/18	2/18	3/18	6/18
2	2/18	4/18	6/18	12/18
Loi de Y	3/18	6/18	9/18	1

3. Lois marginales obtenues en simplifiant les fractions :

— Loi de X : $\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(X=2) = \frac{2}{3}$.

— Loi de Y : $\mathbf{P}(Y=1) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(Y=2) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(Y=3) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme discrete $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.

$$\text{— } \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{N}.$$

$$\text{— } \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{N+1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{N^2-1}{12}.$$

2. Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on effectue k tirages de Bernoulli indépendants de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$:

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = j) = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

3. La famille $([\mathbb{X} = k])_{1 \leq k \leq N}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Il s'agit d'une somme géométrique de raison $1/2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/2)^N}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^N}{N}$$

Correction de l'exercice 4 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{Y} = \mathbb{X}^2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\text{— } \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{— } \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1] \cup [\mathbb{X} = 1]) = \mathbf{P}(\mathbb{X} = -1) + \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Tableau de la loi conjointe :

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	0	1	Loi de $\mathbb{X}$
-1	0	1/4	1/4
0	1/2	0	1/2
1	0	1/4	1/4
Loi de $\mathbb{Y}$	1/2	1/2	1

3. On a $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = 0$, mais $\mathbf{P}(\mathbb{X} = 0) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$.

Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

4. — $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0$.

$$\text{— } \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{— } \mathbb{X}\mathbb{Y} = \mathbb{X}^3, \text{ d'où } \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = (-1)^3 \times \frac{1}{4} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{4} = 0.$$

Correction de l'exercice 5 : [ÉNONCÉ]

1. Comme $\mathbb{B}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{G}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$.

2. Avec le système complet d'événements $([\mathbb{B} = 0], [\mathbb{B} = 1])$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}([\mathbb{B} = 0] \cap [0 \times \mathbb{G} = 0]) + \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1] \cap [1 \times \mathbb{G} = 0])$$

Or $\mathbb{G} \geq 1$, donc $[1 \times \mathbb{G} = 0] = \emptyset$. Ainsi $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 0) = 1 - p$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1 \cap \mathbb{G} = k)$$

Par indépendance de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{G} = k) = p \times (1 - p)^{k-1}p = p^2(1 - p)^{k-1}$$

4. — **Méthode 1 (par indépendance) :** $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{B} \times \mathbb{G}) = \mathbf{E}(\mathbb{B})\mathbf{E}(\mathbb{G}) = p \times \frac{1}{p} = 1$.

— **Méthode 2 (par définition) :**

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} = p^2 \times \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = p^2 \times \frac{1}{p^2} = 1$$

Correction de l'exercice 6 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{U}([1, N])$. Pour tout $i \in [1, N]$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) = \frac{1}{N}$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) = \frac{N+1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_1) = \frac{N^2-1}{12}$.

2. Pour $(i, j) \in [1, N]^2$:

— Si $i = j$: $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 0$.

— Si $i \neq j$: $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i)\mathbf{P}_{[X_1=i]}(\mathbb{X}_2 = j) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N(N-1)}$.

3. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = j) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{N(N-1)} = (N-1) \times \frac{1}{N(N-1)} = \frac{1}{N}$$

$\mathbb{X}_2$ suit également la loi uniforme $\mathcal{U}([1, N])$.

4. Pour $i = j$, $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = i]) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i)\mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = i) = \frac{1}{N^2}$.

$\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ ne sont pas indépendantes.

Correction de l'exercice 7 : [ÉNONCÉ]

1. Somme des probabilités sur $\mathbb{N}^2$:

$$a \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{j+1}} \right) = a \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-1/2} \right) \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{1-1/3} \right) = a \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

D'où $a = 2$.

2. Pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^{i+1}3^{j+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$, donc $\mathbb{X} + 1 \sim \mathcal{G}(1/2)$.

De même, $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \frac{2}{3^{j+1}} \times 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}$, donc $\mathbb{Y} + 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

3.

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{6^{k+1}} = \frac{2}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-1/6} = \frac{2}{5}$$

Correction de l'exercice 8 : [ÉNONCÉ]

1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}$.

2. Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \mathbf{E}((-1)^{\mathbb{X}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k p q^{k-1}$$

En factorisant par $-p$:

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p \sum_{k=1}^{+\infty} (-q)^{k-1} = -p \sum_{j=0}^{+\infty} (-q)^j$$

Comme $|-q| = 1 - p < 1$, la série géométrique converge et vaut :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p \times \frac{1}{1 - (-q)} = -\frac{p}{1 + q} = -\frac{p}{2 - p}$$

Correction de l'exercice 9 : [ÉNONCÉ]

1. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X}) + \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Par indépendance, $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = \mathbf{V}(\mathbb{X}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y}) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le système complet d'événements $([\mathbb{X} = k])_{k \in \mathbb{N}}$ donne :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = n - k])$$

Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}$$

On reconnaît le binôme de Newton $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = (\lambda_1 + \lambda_2)^n$. Ainsi :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$$

D'où $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Correction de l'exercice 10 : [ÉNONCÉ]

1. Les tirages s'effectuent avec remise, donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables indépendantes de même loi uniforme discrète $\mathcal{U}([1, N])$.

2. $[\mathbb{M} \leq k] = [\mathbb{X} \leq k \cap \mathbb{Y} \leq k]$. Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^2$$

Pour $k \in [1, N]$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{M} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k) - \mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{N^2} = \frac{2k-1}{N^2}$$

3. $[\mathbb{T} > k] = [\mathbb{X} > k \cap \mathbb{Y} > k]$. Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^2$$

Pour $k \in [1, N]$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \frac{(N-k+1)^2 - (N-k)^2}{N^2} = \frac{2(N-k)+1}{N^2}$$