

Remédiation 22

Loi d'une somme

Exercice 1 – (Somme de lois de Poisson)

Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2 – (Somme de lois binomiales)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 3 – (Somme de lois géométriques)

Soient $p \in]0; 1[$ et $q \in]0; 1[$ deux réels distincts.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 4 – (Somme de lois uniformes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Commentaires : Ces exercices sont tous les mêmes. La rédaction est donc fortement similaire :

1. On commence par déterminer le support de la loi Z :

	$X(\Omega)$	$Y(\Omega)$	$Z(\Omega)$
Exercice 1	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
Exercice 2	$[0; n]$	$[0; m]$	$[0; n + m]$
Exercice 3	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$[2; +\infty[$
Exercice 4	$[1; n]$	$[1; n]$	$[2; 2n]$

2. On détermine $\mathbf{P}(Z = k)$ grâce à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X , c'est-à-dire la famille $([X = i])_{i \in X(\omega)}$ pour un $k \in Z(\Omega)$.

On commencera donc toujours par calculer :

Soit $k \in Z(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}([X + Y = k]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X + Y = k] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([Y = k - i] \cap [X = i]) \\
 &= \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbf{P}([Y = k - i])\mathbf{P}([X = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &\quad \dots \text{la suite dépend des lois considérées.}
 \end{aligned}$$

