

Nom :

Prénom :

Sujet 1**Variables aléatoires****Question de cours :****Support et loi de probabilité**

1. Définir le support $\mathbb{X}(\Omega)$ d'une variable aléatoire réelle discrète et donner la définition de sa loi de probabilité.
2. Expliquer la méthode en deux étapes pour déterminer la loi d'une variable aléatoire.

Exercice 1 :

On suppose qu'à la roulette d'un casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement 1 euro sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de la mise ;
- s'il perd, il double sa mise et rejoue

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend. Il ne possède que $2^n - 1$ euros, ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 2 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

1. Déterminer la valeur de la constante a .
2. Présenter la loi conjointe du couple (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées.
3. En déduire les lois marginales de X et de Y .

Exercice 3 – Loi conjointe produit et indépendance de lois usuelles :

Soient $\mathbb{B} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{G} \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables aléatoires indépendantes avec $p \in]0, 1[$. On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable $\mathbb{Z}$.
2. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0)$ en utilisant un système complet d'événements lié à $\mathbb{B}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k)$.
4. **(khûbe)** Calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de deux manières différentes.

Nom :

Prénom :

Sujet 2**Variables aléatoires****Question de cours :****Lois usuelles finies**

1. Définir la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Donner leurs espérances et variances.
2. Définir la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et énoncer ses formules d'espérance et de variance.

Exercice 1 :

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

- Déterminer la loi suivie par la variable $X_{k+1} - X_k$.
- En déduire l'espérance de X_N .

Exercice 2 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

Exercice 3 – Tirages sans remise et lois marginales identiques :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). On tire successivement et sans remise deux boules. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 celui de la deuxième.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
2. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, déterminer la probabilité conjointe $\mathbf{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.
3. En déduire la loi marginale de X_2 .
4. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Nom :

Prénom :

Sujet 3**Variables aléatoires****Question de cours :****Lois usuelles infinies**

1. Définir la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Démontrer la formule de son espérance ou de sa variance.
2. Définir la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Rappeler la formule de sa loi ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 1 – Fonction de répartition :Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i])$	0,2	0,3	0,1	0,4

Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{X}$.**Exercice 2 :**

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomial de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. Reconnaître la loi de Y .

Exercice 3 – Couple de variables aléatoires indépendantes à support infini :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+1} \times 3^{j+1}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que $a = 2$.
2. Reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ (à un décalage près).
3. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

Nom :

Prénom :

Sujet 4**Variables aléatoires****Question de cours :****Définition de la loi conjointe**

1. Définir le support $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})(\Omega)$ d'un couple de variables aléatoires discrètes.
2. Définir la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 1 :**Deux variables aléatoires géométriques indépendantes**

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = pq^{k-1}.$$

1. Déterminer $\mathbb{X}(\Omega)$ et calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_{\mathbb{X}}$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.
4. En déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.
5. On pose $\mathbb{Z} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Déterminer la loi de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 – Loi d'un couple, lois marginales, indépendance :

La loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est donnée par :

$\mathbb{Y} \backslash \mathbb{X}$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que l'on a bien défini la loi d'un couple, puis déterminer les lois marginales.
2. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$.

Exercice 3 – Maximum et Minimum de deux tirages avec remise :

On tire avec remise deux boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les numéros obtenus.

1. Justifier l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et rappeler leurs lois.
2. Soit $\mathbb{M} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k)$ puis en déduire la loi de $\mathbb{M}$.
3. Soit $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ puis donner la loi de $\mathbb{T}$.

Nom :

Prénom :

Sujet 5**Variables aléatoires****Question de cours :****Obtention des lois marginales**

1. Énoncer le système complet d'événements associables à la variable $\mathbb{Y}$ (ou $\mathbb{X}$).
2. (**khûbe**) Énoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{X}$ à partir des probabilités conjointes.

Exercice 1 – Probabilités totales (Lois uniforme & binomiale) :

ne urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée. On note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
3. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$.

Exercice 2 – Somme de lois binomiales :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 3 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e^{2^{i+1}} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2.
 - a. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Nom :

Prénom :

Sujet 6**Variables aléatoires****Question de cours :****Loi de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$**

1. Donner la condition d'existence de la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$.
2. Rappeler la formule de $P_{[\mathbb{X}=x]}(\mathbb{Y} = y)$ et vérifier que la somme des probabilités
3. Donner démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{Y}$ à partir de sa loi sachant $[\mathbb{X} = x]$.

Exercice 1 – Formule de transfert (Loi Géométrique) :

oit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
2. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}$. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert.

Exercice 2 – Somme de lois de Poisson :

Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 3 – Probabilités totales et conditionnement (Mélange Uniforme / Binomiale) :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée et on note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$ à l'aide de la Formule des Probabilités Totales.

Nom :

Prénom :

Sujet 7**Variables aléatoires****Question de cours :****Indépendance de deux variables aléatoires**

1. Définir l'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.
2. Énoncer les propriétés sur $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ en cas d'indépendance.

Exercice 1 :**Deux variables aléatoires géométriques indépendantes**

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = pq^{k-1}.$$

1. Déterminer $\mathbb{X}(\Omega)$ et calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_{\mathbb{X}}$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.
4. En déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.
5. On pose $\mathbb{Z} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Déterminer la loi de $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 – Calcul de loi marginale à partir d'un tableau conjoint :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = a(i + j)$.

1. Déterminer la constante a .
2. Dresser le tableau à double entrée de la loi conjointe.
3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Exercice 3 – Somme de lois géométriques :

Soient $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$ deux réels distincts.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Nom :

Prénom :

Sujet 8

Variables aléatoires

Question de cours :

Propriété de la loi géométrique

1. Énoncer et démontrer la propriété de perte de mémoire de la loi géométrique

$$P_{[\mathbb{X} > k]}(\mathbb{X} > k + l) = P(\mathbb{X} > l).$$

Exercice 1 – Problème du collectionneur (Temps d'attente) :

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$).

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, deux boules différentes ont été tirées. Déterminer la loi et l'espérance de T .
2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction **Python** suivante calcule une simulation :

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def V(n):
4      A = []
5      compteur = 0
6      while len(A) < n:
7          u = rd.randint(1, n + 1)
8          if not (u in A):
9              A.append(u)
10             compteur = compteur + 1
11     return compteur

```

Exercice 2 – Compléter un tableau à double entrée :

On considère un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ à valeurs dans $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$ dont la loi conjointe est donnée par $P([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = c \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante c .
2. Dresser le tableau de la loi conjointe et calculer les sommes en marge.
3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$.

Exercice 3 – Somme de lois uniformes :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.