

Sujet 1

Variables aléatoires

Question de cours :

Support et loi de probabilité

1. Définir le support $\mathbb{X}(\Omega)$ d'une variable aléatoire réelle discrète et donner la définition de sa loi de probabilité.
2. Expliquer la méthode en deux étapes pour déterminer la loi d'une variable aléatoire.

Exercice 1 :

On suppose qu'à la roulette d'un casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :

- il mise initialement 1 euros sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de la mise ;
- s'il perd, il double sa mise et rejoue

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend. Il ne possède que $2^n - 1$ euros, ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

1. On note A_n l'événement "le jeu dure au moins n parties".

A_{n+1} est la conjonction des événements indépendants A_n et "le rouge sort au $(n+1)$ -ième tirage".

On en déduit $P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n)$.

Par continuité décroissante, on obtient

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.

Lorsque la partie s'arrête à la n -ième tentative, le joueur a perdu $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ euros et vient de gagner 2^n euros. Au total, il gagne 1 euro. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 euros, son espérance de gain vaut 1 euro.

2. Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n -ième tentative, le gain du joueur est : $3^n - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) = \frac{3^n + 1}{2}$ euros.

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 1}{2} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 1}{2^{n+1}} = +\infty$$

3. Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1P(A_n) - (2^n - 1)P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \frac{1}{2^n} - (2^n - 1) \times \frac{1}{2^n} = 0$$

Exercice 2 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

1. Déterminer la valeur de la constante a .
2. Présenter la loi conjointe du couple (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées.
3. En déduire les lois marginales de X et de Y .

1. Les événements $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2}$ forment un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

On calcule la somme :

$$a \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (i + j) = a \left(\sum_{i=1}^3 \left(3i + \sum_{j=1}^3 j \right) \right) = a (3(1 + 2 + 3) + 3(1 + 2 + 3)) = 36a$$

D'où $36a = 1$, soit $a = \frac{1}{36}$.

2. Le tableau de la loi conjointe est le suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3	$\mathbf{P}(X = i)$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$1 \frac{2}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
$\mathbf{P}(Y = j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$	1

3. Par sommation sur les lignes et les colonnes, on obtient les lois marginales de X et de Y :

$$— X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$$

$\mathbb{X}$	1	2	3
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

— $\mathbb{Y}(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ avec la même loi par symétrie :

$\mathbb{Y}$	1	2	3
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

Exercice 3 – Loi conjointe produit et indépendance de lois usuelles :

Soient $\mathbb{B} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{G} \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables aléatoires indépendantes avec $p \in]0, 1[$. On pose $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$.

- Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable $\mathbb{Z}$.
- Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0)$ en utilisant un système complet d'événements lié à $\mathbb{B}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k)$.
- (khûbe)** Calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de deux manières différentes.
 - Comme $\mathbb{B}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{G}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z} = \mathbb{B} \times \mathbb{G}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}(\Omega) = \mathbb{N}$.
 - Avec le système complet d'événements $([\mathbb{B} = 0], [\mathbb{B} = 1])$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}([\mathbb{B} = 0] \cap [0 \times \mathbb{G} = 0]) + \mathbf{P}([\mathbb{B} = 1] \cap [1 \times \mathbb{G} = 0])$$

Or $\mathbb{G} \geq 1$, donc $[1 \times \mathbb{G} = 0] = \emptyset$. Ainsi $\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 0) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 0) = 1 - p$.

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1 \cap \mathbb{G} = k)$$

Par indépendance de $\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{B} = 1)\mathbf{P}(\mathbb{G} = k) = p \times (1 - p)^{k-1}p = p^2(1 - p)^{k-1}$$

- **Méthode 1 (par indépendance) :** $\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \mathbf{E}(\mathbb{B} \times \mathbb{G}) = \mathbf{E}(\mathbb{B})\mathbf{E}(\mathbb{G}) = p \times \frac{1}{p} = 1$.

— **Méthode 2 (par définition) :**

$$\mathbf{E}(\mathbb{Z}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(\mathbb{Z} = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} = p^2 \times \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = p^2 \times \frac{1}{p^2} = 1$$

Sujet 2

Variables aléatoires

Question de cours :

Lois usuelles finies

1. Définir la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Donner leurs espérances et variances.
2. Définir la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et énoncer ses formules d'espérance et de variance.

Exercice 1 :

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

- Déterminer la loi suivie par la variable $X_{k+1} - X_k$.
- En déduire l'espérance de X_N .
- $X_{k+1} - X_k = n$ si et seulement si, on tire $n - 1$ images déjà obtenues puis une image nouvelle. La proportion en cours du nombre d'images déjà obtenues est $\frac{k}{N}$ et donc

$$P(X_{k+1} - X_k = n) = \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1} \frac{N-k}{N} = \frac{k^{n-1}(N-k)}{N^n}.$$
 On identifie une loi géométrique de paramètre $p = \frac{N-k}{N}$ et d'espérance $\frac{N}{N-k}$.
- Par télescopage, $E(X_N) = \sum_{k=1}^{N-1} E(X_{k+1} - X_k) + E(X_1) = N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$.

Exercice 2 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

Loi de X : Par la formule des probabilités totales avec $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$:

$$P([X = i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j} j!} = \frac{a}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{a}{2^i} e^{\frac{1}{2}}.$$

Valeur de a : Comme $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = 1$, on a

$$ae^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \iff ae^{\frac{1}{2}} \times 2 = 1 \iff a = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Conclusion : $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$ i.e. $\mathbb{X} + 1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, et pour $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{i+j+1}j!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1}j!} \times 2 = e^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} \implies \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 3 – Tirages sans remise et lois marginales identiques :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). On tire successivement et sans remise deux boules. On note $\mathbb{X}_1$ le numéro de la première boule et $\mathbb{X}_2$ celui de la deuxième.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}_1$, son espérance et sa variance.
2. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$, déterminer la probabilité conjointe $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i \cap \mathbb{X}_2 = j)$.
3. En déduire la loi marginale de $\mathbb{X}_2$.
4. Les variables $\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ sont-elles indépendantes ?

1. $\mathbb{X}_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) = \frac{1}{N}$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}_1) = \frac{N+1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}_1) = \frac{N^2-1}{12}$.

2. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$:

— Si $i = j$: $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i \cap \mathbb{X}_2 = j) = 0$.

— Si $i \neq j$: $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i \cap \mathbb{X}_2 = j) = \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}_1=i]}(\mathbb{X}_2 = j) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N(N-1)}$.

3. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = j) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i \cap \mathbb{X}_2 = j) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{N(N-1)} = (N-1) \times \frac{1}{N(N-1)} = \frac{1}{N}$$

$\mathbb{X}_2$ suit également la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.

4. Pour $i = j$, $\mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i \cap \mathbb{X}_2 = i) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{X}_1 = i) \mathbf{P}(\mathbb{X}_2 = i) = \frac{1}{N^2}$.

$\mathbb{X}_1$ et $\mathbb{X}_2$ ne sont pas indépendantes.

Sujet 3

Variables aléatoires

Question de cours :

Lois usuelles infinies

1. Définir la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Démontrer la formule de son espérance ou de sa variance.
2. Définir la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Rappeler la formule de sa loi ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 1 – Fonction de répartition :

Soit $\mathbb{X}$ définie par

x_i	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(\mathbb{X} = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4

Déterminer la fonction de répartition de $\mathbb{X}$.

On calcule $F(x) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 0,2 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 0,5 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0,6 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomial de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. Reconnaître la loi de Y .

1. pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Si $k \leq n$ alors $\mathbf{P}(X = n, Y = k) = \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = k|X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Si $k > n$ alors $\mathbf{P}(X = n, Y = k) = 0$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y = k)$.

Après calculs $\mathbf{P}(Y = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$. Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Exercice 3 – Couple de variables aléatoires indépendantes à support infini :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+1} \times 3^{j+1}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que $a = 2$.
2. Reconnaître les lois marginales de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ (à un décalage près).
3. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.

1. Somme des probabilités sur $\mathbb{N}^2$:

$$a \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{j+1}} \right) = a \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/2} \right) \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - 1/3} \right) = a \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

D'où $a = 2$.

2. Pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^{i+1} 3^{j+1}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{i+1}$, donc $\mathbb{X} + 1 \sim \mathcal{G}(1/2)$.

De même, $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j) = \frac{2}{3^{j+1}} \times 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{j+1}$, donc $\mathbb{Y} + 1 \sim \mathcal{G}(2/3)$.

- 3.

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = k] \cap [\mathbb{Y} = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{6^{k+1}} = \frac{2}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{2}{5}$$

Sujet 4

Variables aléatoires

Question de cours :

Définition de la loi conjointe

1. Définir le support $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})(\Omega)$ d'un couple de variables aléatoires discrètes.
2. Définir la loi conjointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Exercice 1 :

Deux variables aléatoires géométriques indépendantes

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = pq^{k-1}.$$

1. Déterminer $\mathbb{X}(\Omega)$ et calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_{\mathbb{X}}$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{X} = \mathbb{Y})$.
4. En déduire $\mathbf{P}(\mathbb{X} < \mathbb{Y})$.
5. On pose $\mathbb{Z} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Déterminer la loi de $\mathbb{Z}$.

1. Puisque $\mathbb{X}$ représente le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes,

$$\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

La variable $\mathbb{X}$ est donc discrète à valeurs dans un ensemble infini dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[\mathbb{X} > n]$ signifie que les n premières épreuves sont des échecs. Par indépendance,

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = q^n}.$$

2. Pour $x < 1$, on a $F_{\mathbb{X}}(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, en posant $n = \lfloor x \rfloor$,

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{X}}(x) &= \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \\ &= 1 - q^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F_{\mathbb{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}}$$

3. Les événements $[X = Y = k]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $[X = Y]$. Par σ -additivité et indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2}{1 - q^2}. \end{aligned}$$

Or $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}.$$

4. Les variables X et Y ont la même loi et jouent des rôles symétriques. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X > Y).$$

Les événements $[X < Y]$, $[X = Y]$ et $[X > Y]$ forment un système complet d'événements. Donc

$$2\mathbf{P}(X < Y) + \mathbf{P}(X = Y) = 1.$$

D'où

$$\mathbf{P}(X < Y) = \frac{q}{1 + q} = \frac{1 - p}{2 - p}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z > n) &= \mathbf{P}(X > n, Y > n) \\ &= \mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y > n) \\ &= q^{2n}. \end{aligned}$$

Par différence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n) &= \mathbf{P}(Z > n - 1) - \mathbf{P}(Z > n) \\ &= q^{2(n-1)} - q^{2n} \\ &= (1 - q^2)(q^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $1 - q^2 = p(2 - p)$, on obtient

$$\mathbf{P}(Z = n) = p(2 - p)[q^2]^{n-1}.$$

La variable Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p(2 - p)$.

Exercice 2 – Loi d'un couple, lois marginales, indépendance :

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$\backslash Y$	0	1	2
X			
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que l'on a bien défini la loi d'un couple, puis déterminer les lois marginales.
 2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 3. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.
1. Toutes les valeurs dans le tableau sont positifs et leur somme fait 1 donc on a bien défini la loi d'un couple de variables aléatoires.

D'après la loi des probabilités totales on trouve rapidement les lois marginales :

$$\forall x \in \llbracket 0; 1 \rrbracket, \mathbf{P}(X = x) = \sum_{y \in \llbracket 0; 2 \rrbracket} \mathbf{P}(X = x \cap Y = y),$$

et

$$\forall y \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in \llbracket 0; 1 \rrbracket} \mathbf{P}(X = x \cap Y = y).$$

Ce que l'on résume dans deux tableaux :

X	0	1
$\mathbf{P}(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$

Loi de X

Y	0	1	2
$\mathbf{P}(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Loi de Y

Idee
 $\frac{1}{6} \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\frac{7}{10}\right)$

Remarque : Histoire de redonner son sens au terme « marginal », on peut aussi présenter ces probabilités à la « marge » du tableau précédent :

$\backslash Y$	0	1	2	$\mathbf{P}(X = x)$
X				
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{10}$
$\mathbf{P}(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

2. Comme $\mathbf{P}(X = 0 \cap Y = 0) = \frac{1}{20} \neq \frac{1}{10} = \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0)$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3. $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ prenant un nombre fini de valeurs, elles admettent une espérance et on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbb{X}) &= \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} x \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \\ &= 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{10}. \\ \mathbf{E}(\mathbb{Y}) &= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} y \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

i Remarque

On re-
trouve
l'es-
pé-
rance
d'une
loi
de
Ber-
noulli
pour
 $\mathbb{X}$.

Exercice 3 – Maximum et Minimum de deux tirages avec remise :

On tire avec remise deux boules dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les numéros obtenus.

1. Justifier l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ et rappeler leurs lois.
 2. Soit $\mathbb{M} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k)$ puis en déduire la loi de $\mathbb{M}$.
 3. Soit $\mathbb{T} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{T} > k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ puis donner la loi de $\mathbb{T}$.
1. Les tirages s'effectuent avec remise, donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables indépendantes de même loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.
2. $[\mathbb{M} \leq k] = [\mathbb{X} \leq k \cap \mathbb{Y} \leq k]$. Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^2$$

Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{M} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k) - \mathbf{P}(\mathbb{M} \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{N^2} = \frac{2k-1}{N^2}$$

3. $[\mathbb{T} > k] = [\mathbb{X} > k \cap \mathbb{Y} > k]$. Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^2$$

Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{T} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{T} > k-1) - \mathbf{P}(\mathbb{T} > k) = \frac{(N-k+1)^2 - (N-k)^2}{N^2} = \frac{2(N-k)+1}{N^2}$$

Sujet 5

Variables aléatoires

Question de cours :

Obtention des lois marginales

1. Énoncer le système complet d'événements associables à la variable $\mathbb{Y}$ (ou $\mathbb{X}$).
2. (**khûbe**) Énoncer et démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{X}$ à partir des probabilités conjointes.

Exercice 1 – Probabilités totales (Lois uniforme & binomiale) :

ne urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée. On note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
3. Exprimer $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$.

1. $\mathbb{X} \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Donc $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{N+1}{2}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{N^2-1}{12}$.

2. Sachant $[\mathbb{X} = k]$, $\mathbb{Y}$ compte le nombre de "Pile" lors de k lancers indépendants avec une pièce équilibrée. La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$.

3. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $([\mathbb{X} = k])_{k \in \llbracket 1, N \rrbracket}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^N}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^N}{N}$$

Exercice 2 – Somme de lois binomiales :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Comme $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$, on a $Z(\Omega) = \llbracket 0; m+n \rrbracket$.
Soit $k \in \llbracket 0; m+n \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([Z = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i])\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{m+n-k} \\
 &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sum_{i=0}^n \binom{m}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{m+n}{k} :$$

$$\text{Donc, } \mathbf{P}([Z = k]) = \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}.$$

La somme de deux lois binomiales de paramètres n, p et m, p est une loi binomiale de paramètre $m+n, p$.

Exercice 3 :

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2.
 - a. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
 - b. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

$$1. \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}.$$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}.$$

$$\text{Soit } i \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{j \geq 0} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{e 2^{i+1}} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \text{ converge et } \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

$$\text{Or } P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) \text{ donc } P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{e 2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}, P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2e j!} \sum_{i \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i \text{ converge (série géométrique de raison } \frac{1}{2}) \text{ et}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2e j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{e j!}.$$

$$\text{Or } P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Donc } P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2e j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2e j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{e j!}.$$

Conclusion : $\forall j \in \mathbb{N}, P(Y = j) = \frac{1}{e j!}$.

2. a. On pose $Z = X + 1$.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(Z = n) = P(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc, d'après le cours, } E(Z) = \frac{1}{p} = 2 \text{ et } V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2.$$

$$\text{Donc } E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ et } V(X) = V(Z - 1) = V(Z) = 2.$$

C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

- b. Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

Donc, d'après le cours, $E(X) = V(X) = \lambda = 1$.

3. On a : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4. $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((X = k) \cap (Y = k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e 2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2e} e^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc } P(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

Sujet 6

Variables aléatoires

Question de cours :

Loi de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$

1. Donner la condition d'existence de la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$.
2. Rappeler la formule de $P_{[\mathbb{X}=x]}(\mathbb{Y} = y)$ et vérifier que la somme des probabilités
3. Donner démontrer la formule permettant d'obtenir la loi marginale de $\mathbb{Y}$ à partir de sa loi sachant $[\mathbb{X} = x]$.

Exercice 1 – Formule de transfert (Loi Géométrique) :

oit $\mathbb{X} \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Rappeler $\mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{E}(\mathbb{X})$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X})$.
 2. Soit $\mathbb{Y} = (-1)^{\mathbb{X}}$. Déterminer $\mathbf{E}(\mathbb{Y})$ à l'aide du théorème de transfert.
1. $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{q}{p^2}$.
 2. D'après le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k p q^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{+\infty} (-q)^{k-1}$$

Puisque $|-q| = q < 1$, la série géométrique converge et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}) = -p \cdot \frac{1}{1 - (-q)} = \frac{-p}{1 + q} = \frac{-p}{2 - p}$$

Exercice 2 – Somme de lois de Poisson :

Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=0}^k \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{car } k - i \geq 0 \iff k \leq i) \\
 &= \sum_{i=0}^k e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^k \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \frac{\lambda^i}{i!} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{k!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

La somme de deux lois de Poisson de paramètres λ et μ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 3 – Probabilités totales et conditionnement (Mélange Uniforme / Binomiale) :

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire une boule au hasard et on note $\mathbb{X}$ son numéro. Puis, on lance $\mathbb{X}$ fois une pièce équilibrée et on note $\mathbb{Y}$ le nombre de "Pile" obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$.
3. Calculer $\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0)$ à l'aide de la Formule des Probabilités Totales.

1. $\mathbb{X}$ suit la loi uniforme discrete $\mathcal{U}([1, N])$.

$$— \forall k \in [1, N], \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) = \frac{1}{N}.$$

$$— \mathbf{E}(\mathbb{X}) = \frac{N+1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbb{X}) = \frac{N^2-1}{12}.$$

2. Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on effectue k tirages de Bernoulli indépendants de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

La loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$:

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = j) = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

3. La famille $([\mathbb{X} = k])_{1 \leq k \leq N}$ forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\mathbb{Y} = 0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Il s'agit d'une somme géométrique de raison $1/2$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 0) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/2)^N}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^N}{N}$$

Sujet 7

Variables aléatoires

Question de cours :

Indépendance de deux variables aléatoires

1. Définir l'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y .
2. Énoncer les propriétés sur $E(XY)$ et $V(X + Y)$ en cas d'indépendance.

Exercice 1 :

Deux variables aléatoires géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = pq^{k-1}.$$

1. Déterminer $X(\Omega)$ et calculer $P(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X .
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. En déduire $P(X < Y)$.
5. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z .

1. Puisque X représente le rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

La variable X est donc discrète à valeurs dans un ensemble infini dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $[X > n]$ signifie que les n premières épreuves sont des échecs. Par indépendance,

$$P(X > n) = q^n.$$

2. Pour $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, en posant $n = \lfloor x \rfloor$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq n) \\ &= 1 - P(X > n) \\ &= 1 - q^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ 1 - q^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Les événements $[X = Y = k]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $[X = Y]$. Par σ -additivité et indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2}{1 - q^2}. \end{aligned}$$

Or $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}.$$

4. Les variables X et Y ont la même loi et jouent des rôles symétriques. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X > Y).$$

Les événements $[X < Y]$, $[X = Y]$ et $[X > Y]$ forment un système complet d'événements. Donc

$$2\mathbf{P}(X < Y) + \mathbf{P}(X = Y) = 1.$$

D'où

$$\mathbf{P}(X < Y) = \frac{q}{1 + q} = \frac{1 - p}{2 - p}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z > n) &= \mathbf{P}(X > n, Y > n) \\ &= \mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y > n) \\ &= q^{2n}. \end{aligned}$$

Par différence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n) &= \mathbf{P}(Z > n - 1) - \mathbf{P}(Z > n) \\ &= q^{2(n-1)} - q^{2n} \\ &= (1 - q^2)(q^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $1 - q^2 = p(2 - p)$, on obtient

$$\mathbf{P}(Z = n) = p(2 - p)[q^2]^{n-1}.$$

La variable Z suit donc une loi géométrique de paramètre $p(2 - p)$.

Exercice 2 – Calcul de loi marginale à partir d'un tableau conjoint :

Soit (X, Y) un couple à valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ vérifiant $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a(i + j)$.

1. Déterminer la constante a .

2. Dresser le tableau à double entrée de la loi conjointe.

3. En déduire les lois marginales de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

1. La somme des probabilités conjointes sur tout le support doit être égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a(i+j) = 1$$

Calculons la somme :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (i+j) = (2+3+4) + (3+4+5) + (4+5+6) = 9+12+15 = 36$$

D'où $36a = 1$, soit $a = \frac{1}{36}$.

2. En remplaçant a par $\frac{1}{36}$, on obtient le tableau de la loi conjointe :

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	1	2	3	Loi de $\mathbb{X}$
1	2/36	3/36	4/36	9/36
2	3/36	4/36	5/36	12/36
3	4/36	5/36	6/36	15/36
Loi de $\mathbb{Y}$	9/36	12/36	15/36	1

3. En faisant la somme par ligne et par colonne :

$$\text{— Loi de } \mathbb{X} : \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(\mathbb{X} = 2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(\mathbb{X} = 3) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

— Loi de $\mathbb{Y}$: Par symétrie de la formule $a(i+j)$, la loi marginale de $\mathbb{Y}$ est identique à celle de $\mathbb{X}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 2) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 3) = \frac{5}{12}.$$

Exercice 3 – Somme de lois géométriques :

Soient $p \in]0; 1[$ et $q \in]0; 1[$ deux réels distincts.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{Z} = k]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (k - i \geq 1 \iff i \leq k - i) \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} q(1 - q)^{k-i-1} p(1 - p)^{i-1} \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1}}{1 - p} \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^i \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1}}{1 - p} \frac{1 - p}{1 - q} \frac{1 - \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^{k-1}}{1 - \frac{1 - p}{1 - q}} \quad \left(p \neq q \text{ donc } \frac{1 - p}{1 - q} \neq 1 \right) \\
 &= pq(1 - q)^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{1 - p}{1 - q} \right)^{k-1}}{p - q} \\
 &= pq \frac{(1 - q)^{k-1} - (1 - p)^{k-1}}{p - q}.
 \end{aligned}$$

Sujet 8

Variables aléatoires

Question de cours :

Propriété de la loi géométrique

1. Énoncer et démontrer la propriété de perte de mémoire de la loi géométrique

$$P_{[X > k]}(X > k + l) = P(X > l).$$

Exercice 1 – Problème du collectionneur (Temps d'attente) :

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$).

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, deux boules différentes ont été tirées. Déterminer la loi et l'espérance de T .
2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction Python suivante calcule une simulation :

```

1  import numpy.random as rd
2
3  def V(n):
4      A = []
5      compteur = 0
6      while len(A) < n:
7          u = rd.randint(1, n + 1)
8          if not (u in A):
9              A.append(u)
10             compteur = compteur + 1
11     return compteur

```

1. Lors du 1er tirage, on obtient une certaine boule. Pour les tirages suivants, obtenir une boule différente de la première a une probabilité de $p = \frac{n-1}{n}$ à chaque tirage (indépendant des autres). La variable $T - 1$ compte le nombre de tirages supplémentaires nécessaires pour obtenir une boule différente. $T - 1$ suit donc une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-1}{n}$. Ainsi, $T(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et pour tout $k \geq 2$:

$$P(T = k) = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(T) = 1 + E(T - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}$$

2. La liste A stocke les numéros distincts déjà obtenus. La boucle continue tant que la longueur de A est strictement inférieure à n , c'est-à-dire tant qu'on n'a pas obtenu la totalité des n numéros. La variable `compteur` renvoie le nombre total de tirages nécessaires pour obtenir les n numéros distincts. La fonction simule le classique **problème du collectionneur**.

Exercice 2 – Compléter un tableau à double entrée :

On considère un couple (X, Y) à valeurs dans $\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$ dont la loi conjointe est donnée par $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = c \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante c .
2. Dresser le tableau de la loi conjointe et calculer les sommes en marge.
3. En déduire les lois marginales de X et de Y .

1. La somme totale des probabilités est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 c \times i \times j = c \left(\sum_{i=1}^2 i \right) \left(\sum_{j=1}^3 j \right) = 1$$

On a $\sum_{i=1}^2 i = 1 + 2 = 3$ et $\sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6$.

Donc $c \times 3 \times 6 = 18c = 1$, d'où $c = \frac{1}{18}$.

2. Le tableau de la loi conjointe avec les marges :

$X \backslash Y$	1	2	3	Loi de X
1	1/18	2/18	3/18	6/18
2	2/18	4/18	6/18	12/18
Loi de Y	3/18	6/18	9/18	1

3. Lois marginales obtenues en simplifiant les fractions :

— Loi de X : $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(X = 2) = \frac{2}{3}$.

— Loi de Y : $\mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(Y = 3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 – Somme de lois uniformes :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}([1, n])$ deux variables aléatoires réelles indépendantes.

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Comme $X(\Omega) = [1; n]$ et $Y(\Omega) = [1; n]$, on a $Z(\Omega) = [2; 2n]$.

Soit $k \in [2; 2n]$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i] \cap [\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq k-i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i])
 \end{aligned}$$

Or, $1 \leq k - i \leq n \iff k - n \leq i \leq k - 1$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k-n \leq i \leq k-1}} \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \\
 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k-n \leq i \leq k-1}} \frac{1}{n^2} \\
 &= \sum_{i=\max(1, k-n)}^{\min(n, k-1)} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} (\min(n, k-1) - \max(1, k-n) + 1)
 \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas.

Premier cas : $k \geq n + 1$: Alors $\min(n, k-1) = n$ et $\max(1, k-n) = k-n$ puis

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{n^2} (n - (k-n) + 1) = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

Deuxième cas : $k \leq n$: Alors $\min(n, k-1) = k-1$ et $\max(1, k-n) = 1$ puis

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \frac{1}{n^2} (k-1 - 1 + 1) = \frac{k-1}{n^2}.$$

Et on remarque que les deux formules coïncident pour $k = n + 1$.

En conclusion,

$$\forall k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) = \begin{cases} \frac{2n - k + 1}{n^2} & \text{si } k \geq n + 1 \\ \frac{k - 1}{n^2} & \text{si } k \leq n. \end{cases}$$