

IV

Couples de variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

I COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	2
I.1 INTRODUCTION	2
I.2 LOIS CONJOINTE ET MARGINALES	3
I.3 FONDATIONS ET SÉRIES DOUBLES	10
II LOIS CONDITIONNELLES	12
III INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES	16
IV OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES	21
IV.1 LOI D'UNE SOMME	21
IV.2 LOI D'UN PRODUIT	26
IV.3 LOI D'UN MAXIMUM ET D'UN MINIMUM	27
V BILAN ET COMPÉTENCES ATTENDUES	30
INDEX	32

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

I. COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

I.1 – Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro $\mathbb{X}$.
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à $\mathbb{X}$.
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est $\mathbb{Y}$.

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.

Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1 ; 6 \rrbracket \times \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$.

On veut déterminer la loi de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i ; j) \in \llbracket 1 ; 6 \rrbracket^2$,

$$P((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j))$$

.

$$\text{Or, } P((\mathbb{X} = i) \cap (\mathbb{Y} = j)) = P(\mathbb{X} = i) \times P_{(\mathbb{X}=i)}(\mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}.$$

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	$P(\mathbb{X} = k)$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(\mathbb{Y} = k)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite *conjointe*, du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.
- Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$. On les appellera donc les lois *marginales*.

Définition 1 – Couple de variables aléatoires :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω .

On appelle *couple de variables aléatoires*, noté $\mathbb{Z} = (\mathbb{X}; \mathbb{Y})$, l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (\mathbb{X}(\omega); \mathbb{Y}(\omega)).\end{aligned}$$

Exemple 1 – Min et Max :

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

- On note $\mathbb{X}$ la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats obtenus.
- On note $\mathbb{Y}$ la variable aléatoire égale au plus grand des deux résultats obtenus.

Rapidement et facilement :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$$

$\mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	$\mathbf{P}(\mathbb{X} = i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

I.2 – Lois conjointe et marginales**Définition 2 – Loi conjointe et lois marginales :**

- D1** • On appelle *loi du couple aléatoire* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ (ou *loi conjointe* de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$) la donnée de la fonction

$$\begin{aligned}F_{(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} : \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ (x; y) &\longmapsto \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]).\end{aligned}$$

D2 • La loi de $\mathbb{X}$ est appelée la première *loi marginale* du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, et la loi de $\mathbb{Y}$ la seconde loi marginale de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Méthode 1 – Déterminer la loi conjointe d'un couple :

Déterminer la loi jointe de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ c'est :

- préciser $\mathbb{X}(\Omega)$ et $\mathbb{Y}(\Omega)$.
- déterminer $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$ pour tous $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ et $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$.

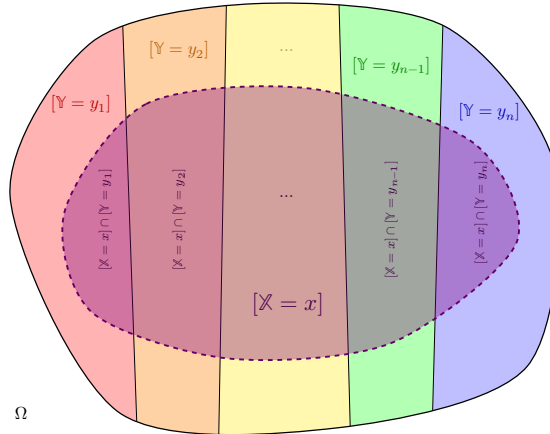


FIGURE IV.1 : Loi des probabilités totales pour $[\mathbb{X} = x]$ à travers le sce $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$.

Proposition 1 – Loïs marginales :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω .

$$\forall x \in \mathbb{X}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$$

.

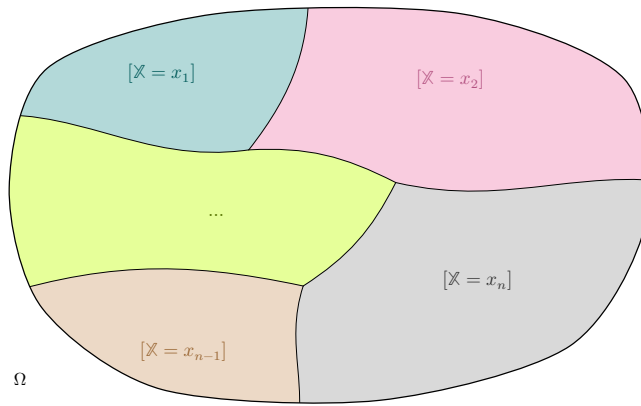
$$\forall y \in \mathbb{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$$

.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$. La famille $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$ forme un système complet d'événements de Ω . Par la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[\mathbb{X} = x]$, on a immédiatement :

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]).$$

Le raisonnement est rigoureusement identique pour la seconde loi marginale en échangeant les rôles de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$. ✓

FIGURE IV.2 : Le sce $([X = x])_{x \in \mathcal{X}(\Omega)}$.**Méthode 2 – Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe :**

Par exemple, on obtient la loi de Y en utilisant la formule des probabilités totales avec $([X = x])_{x \in \mathcal{X}(\Omega)}$ comme système complet d'évènements :

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y = y]) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Proposition 2 – SCE associé à un couple :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

P1 • La famille $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

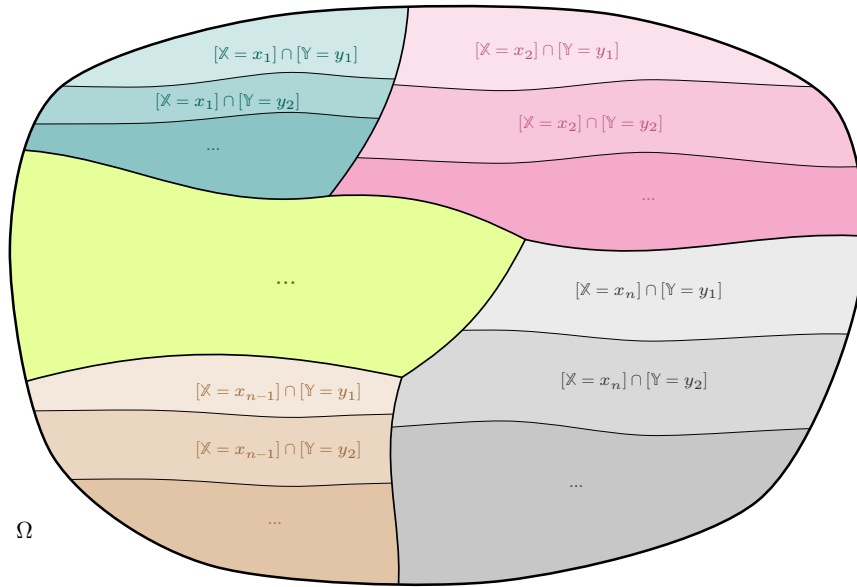
P2 • La série double $\sum_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.

Moralité :

- La loi conjointe contient *toute* l'information du couple : elle permet de retrouver de manière unique les deux lois marginales.
- La connaissance des lois marginales seules *ne suffit pas* à reconstituer la loi conjointe, sauf dans le cas très particulier où les variables sont indépendantes.

Attention

La réciproque est fausse : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.

FIGURE IV.3 : Le sce $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)}$.**Preuve :****P1** • Tout d'abord l'incompatibilité deux à deux :Soit $(x_1, y_1) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$ et $(x_2, y_2) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$ tels que :

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2).$$

Par commutativité de l'intersection, on a :

$$([X = x_1] \cap [Y = y_1]) \cap ([X = x_2] \cap [Y = y_2]) = ([X = x_1] \cap [X = x_2]) \cap ([Y = y_1] \cap [Y = y_2])$$

Comme $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ alors $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$ et l'une des deux intersections est vide.

$$= \emptyset.$$

Le recouvrement de Ω maintenant :

$$\begin{aligned} \bigcup_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ y \in \mathcal{Y}(\Omega)}} [X = x] \cap [Y = y] &= \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \left(\bigcup_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} [X = x] \cap [Y = y] \right) \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \left([X = x] \cap \left(\bigcup_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} [Y = y] \right) \right) && \text{(distributivité de } \cap \text{ sur } \cup) \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} ([X = x] \cap \Omega) && \text{(car } ([Y = y])_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} \text{ est un sce)} \\ &= \bigcup_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} [X = x] \\ &= \Omega && \text{(car } ([X = x])_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \text{ est aussi un sce).} \end{aligned}$$

Remarque

Cette démonstration est valable dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis mais aussi dans le cas où ils sont infinis (déénombrables). Cela implique alors que les sommes considérées sont infinies.

Idée

Cette formule donne un moyen de vérifier le calcul de la loi d'un couple. On peut sommer tous les nombres du tableau : on doit trouver 1.

P2 • En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ y \in \mathcal{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \left(\sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} \left(\sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$



Exercice 1 – (Détermination d'une loi conjointe et lois marginales)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

1. Déterminer la valeur de la constante a .
2. Présenter la loi conjointe du couple (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées.
3. En déduire les lois marginales de X et de Y .

1. Les événements $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2}$ forment un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

On calcule la somme :

$$a \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (i + j) = a \left(\sum_{i=1}^3 \left(3i + \sum_{j=1}^3 j \right) \right) = a (3(1 + 2 + 3) + 3(1 + 2 + 3)) = 36a$$

D'où $36a = 1$, soit $a = \frac{1}{36}$.

2. Le tableau de la loi conjointe est le suivant :

$\begin{array}{c} Y \\ \diagdown \\ X \end{array}$	1	2	3	$\mathbf{P}(X = i)$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$1\frac{2}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
$\mathbf{P}(Y = j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$	1

3. Par sommation sur les lignes et les colonnes, on obtient les lois marginales de X et de Y :

— $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

X	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

— $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ avec la même loi par symétrie :

Y	1	2	3
$\mathbf{P}(Y = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

Exemple 2 – Loi marginales à partir de la loi conjointe :

En reprenant l'exemple (1) et en sommant par colonne et par ligne, on obtient :

— la loi de X : $X(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$

X	1	2	3	4	5	6
$P([X = i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}[\llbracket 1 ; 6 \rrbracket].$$

— la loi de Y : $Y(\Omega) = \llbracket 1 ; 6 \rrbracket$

X	1	2	3	4	5	6
$P([Y = j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$Y \rightsquigarrow ?.$$

Attention

Certaines $P([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nulles sans que ni $P([X = x])$ ni $P([Y = y])$ ne le soient.

Exemple 3 :

Soient $n \in \llbracket 2 ; +\infty \rrbracket$ et $p \in]0 ; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.

Déterminons les lois de X et Y puis celle du couple (X, Y) .

- Loi de X : L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p . La variable aléatoire X prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des n répétitions.

Par conséquent : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$.

- Loi de Y : De la même manière, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$.

- Loi jointe de (X, Y) : On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

En remarquant que la somme des PILE et des FACES est toujours constant à n , pour tout $(i, j) \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^2$, on a :

— si $i + j \neq n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$ et $P([X = i] \cap [Y = j]) = 0$.

— si $i + j = n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = [X = i] \cap [Y = n - i]$
 $= [X = i] \cap [X = i] = [X = i]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } P([X = i] \cap [Y = j]) &= P([X = i]) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} p^i q^j \quad (q = 1 - p \text{ et } i + j = n). \end{aligned}$$

Conclusion, pour la loi jointe $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2, \mathbf{P}(\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^j, & \text{si } i + j = n \\ 0, & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Exemple 4 :

On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$.

On note $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ les variables aléatoires respectivement égales aux rangs du premier PILE et du second PILE.

Déterminons la loi jointe du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement « obtenir PILE au k -ième lancer » et $F_k = \overline{P_k}$. Considérons déjà que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

- Si $i \geq j$: Il est impossible d'obtenir le second PILE à un rang inférieur ou égal à celui du premier PILE.

Ainsi, $\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j = \emptyset$ et donc $\mathbf{P}(\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j) = 0$.

- Si $i < j$:

$\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j$ est réalisé $\iff$ on obtient le premier PILE au i -ème lancer et le second au j -ième lancer

$\iff$ on obtient FACE aux éventuels lancers 1 à $i - 1$, puis PILE au i -ème lancer, puis FACE aux lancers éventuels $i + 1$ à $j - 1$, et PILE au j -ème lancer

D'où,

$$\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k \right) \cap P_j.$$

Et,

$$\mathbf{P}(\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j) = \mathbf{P} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k \right) \cap P_j \right)$$

Par indépendance des lancers, on simplifie,

$$\begin{aligned} &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1-p) \right) \times p \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p) \right) \times p \\ &= (1-p)^{i-1} p (1-p)^{j-i-1} p \\ &= p^2 (1-p)^{j-2} \end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \mathbf{P}(\mathbb{X} = i \cap \mathbb{Y} = j) = \begin{cases} p^2 (1-p)^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Rappel

— Une intersection d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à Ω

— Une union d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à $\emptyset$

— Un produit de réels indexé sur un ensemble vide est égal à 1

— Une somme de réels indexée sur un ensemble vide est égale à 0

Rappel

$$\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1.$$

I.3 – Fondations et séries doubles

Définition 3 – Suite double :

On appelle *suite double* (réelle), notée $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$, toute fonction

$$u : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Théorème 3 – Théorème de Fubini-Tonelli (admis) :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes positifs.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \geq 0, \\ \bullet \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j \text{ converge,} \end{array} \right.$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \text{ converge,} \end{array} \right.$$

et les sommes doubles satisfont :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

💡 Idée

Le théorème de Fubini-Tonelli permet d'échanger l'ordre des sommations infinies sans risque d'erreur, sous réserve que tous les termes manipulés soient positifs.

Exercice 2 – (Sommentation double)

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} \geq 0$.

$$\text{— Pour } j \in \mathbb{N} \text{ fixé : } \sum_{i=0}^N \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^j} = s_j.$$

$$\text{— La série } \sum_{j \geq 0} s_j = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{2^j} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2} \in]-1, 1[, \text{ donc elle converge.}$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la série double converge et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^j} = 2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Théorème 4 – Fondation :

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables. Si $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une suite double positive telle que $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1$, alors pour toutes familles de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de variables aléatoires sur Ω tels que :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, \mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.
- $\forall (i, j) \in I \times J, \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]) = p_{i,j}$.

Exemple 5 :

Dans l'exercice (2), on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4.

Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

On a ainsi :

- $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} \geq 0$,
- la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.

Conclusion, la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.

Exercice 3 – (Loi conjointe et constantes inconnues)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Loi de $\mathbb{X}$: Par la formule des probabilités totales avec $([\mathbb{Y} = j])_{j \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j} j!} = \frac{a}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{a}{2^i} e^{\frac{1}{2}}.$$

Valeur de a : Comme $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) = 1$, on a

$$ae^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \iff ae^{\frac{1}{2}} \times 2 = 1 \iff a = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Conclusion : $\mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{2^{i+1}}$ i.e. $X + 1 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$, et pour Y :

$$\mathbf{P}([Y = j]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{i+j+1}j!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1}j!} \times 2 = e^{-\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2})^j}{j!} \Rightarrow Y \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 4 – (Loi conjointe sur un support infini)

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

1. Montrer que la série double converge et déterminer la valeur de c pour que cette famille de réels définisse une loi de probabilité conjointe.
2. Déterminer la loi marginale de X , puis celle de Y .
3. Reconnaître des lois usuelles.

1. Par séparation des variables dans la somme géométrique :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c}{2^i \cdot 3^j} = c \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j \right)$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

La somme vaut donc $c \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{c}{2}$. Pour obtenir une loi de probabilité, il faut $\frac{c}{2} = 1$, d'où $c = 2$.

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{2^i \cdot 3^j} = \frac{2}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{2}{2^i} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{2}{3^j} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2}{3^j} \times 1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$

3. On reconnaît que :

$$— X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (loi géométrique de paramètre } p_1 = \frac{1}{2}\text{)}.$$

$$— Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right) \text{ (loi géométrique de paramètre } p_2 = \frac{2}{3}\text{)}.$$

II. LOIS CONDITIONNELLES

Dans de nombreux problèmes, les variables X et Y n'ont pas des rôles symétriques : l'une dépend explicitement du résultat obtenu par l'autre. La notion de loi conditionnelle traduit cette dépendance chronologique ou structurelle.

Définition 4 – Lois conditionnelles :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

D1 • Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application

$$\begin{aligned} F_{[Y=y]} : X(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P_{[Y=y]}([X = x]). \end{aligned}$$

D2 • Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est l'application

$$\begin{aligned} F_{[X=x]} : Y(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ y &\longmapsto P_{[X=x]}([Y = y]). \end{aligned}$$

Rappel

Si $P(A) \neq 0$ alors

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Méthode 3 – Déterminer une loi conditionnelle :

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, on donne :

- $X(\Omega)$.
- $P_{[Y=y]}([X = x])$ pour tous $x \in X(\Omega)$.

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement 2 boules donc sans remise.

On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche.

On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

Déterminons la loi de probabilité du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales de X et Y puis la loi de X conditionnée par Y ainsi que la loi de Y conditionnée par X .

La loi de probabilité du couple (X, Y) est

	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	Total
$(X = 0)$	$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$(X = 1)$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

Les lois marginales sont identiques :

x	0	1
$\mathbf{P}([X = x])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

et

y	0	1
$\mathbf{P}([Y = y])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

La loi de probabilité de Y

— conditionnée par $[X = 0]$ est :

x	0	1
$\mathbf{P}_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

— conditionnée par $[X = 1]$ est :

x	0	1
$\mathbf{P}_{(X=1)}([Y = x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

De même, la loi de X

— conditionnée par $[Y = 0]$ est :

x	0	1
$\mathbf{P}_{(Y=0)}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

— conditionnée par $[Y = 1]$ est :

x	0	1
$\mathbf{P}_{(Y=1)}([X = x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En particulier,

Proposition 5 – Détermination des lois marginales à partir des lois conditionnelles :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

— Loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned} \forall (x; y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\ &= \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]). \end{aligned}$$

— Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$:

Si $\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y]) \neq 0$ alors

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]).$$

— Loi de Y via les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$:

Idée

On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.

Si $\forall x \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0$ alors

$$\forall y \in \mathbb{Y}(\Omega), \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y} = y]).$$

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y} = y]) = \frac{\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])}{\mathbf{P}([\mathbb{X} = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,
- et la loi de $\mathbb{X}$,

alors on obtient la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$.

Mais aussi, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=x]}([\mathbb{Y} = y])$ donc si on connaît :

- la loi de $\mathbb{X}$,
- la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = x]$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$,

alors on obtient la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

 **Preuve :** Les premières égalités résultent de la définition des probabilités conditionnelles, les deux dernières formules résultent de la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'événements $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$ et $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$. 

Exercice 5 – (Application aux processus de tirages complexes (Loi de Poisson conditionnée))

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) le nombre de baguettes magiques produites en une heure.

Chaque baguette a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être défectueuse, indépendamment des autres.

Soit $\mathbb{Y}$ le nombre de baguettes défectueuses.

1. Préciser la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la loi marginale de $\mathbb{Y}$.

1. Sachant $[\mathbb{X} = n]$, $\mathbb{Y}$ compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes, donc

$$\mathbb{Y}_{[\mathbb{X}=n]} \sim \mathcal{B}(n, p).$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, par la FPT avec $([\mathbb{X} = n])_{n \geq k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = n) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=n]}(\mathbb{Y} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

Méthode 4 – Déterminer une loi conjointe à partir des lois marginales et :

Pour déterminer la loi d'un couple (X, Y) lorsque l'expérience comporte deux étapes successives, il suffit de déterminer :

- la loi de X , puis les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$,
- puis la loi conjointe par multiplication :

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(X = x) \mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y).$$

Exercice 6 – (Loi fille et loi mère)

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

1. Donner, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
3. Déterminer la loi marginale de Y .

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sachant $[X = k]$, $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, k \rrbracket)$. Donc :

$$\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases}$$

2. Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{nk} & \text{si } 1 \leq j \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, $Y = j$ est réalisé si et seulement si $X \geq j$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^n \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k}.$$

III. INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES**Définition 5 – Variables aléatoires indépendantes :**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . X et Y sont dites *indépendantes* lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \times \mathbf{P}([Y = y]).$$

⚠ Attention

Pour que deux variables soient indépendantes, l'égalité de factorisation doit être vérifiée pour **tous** les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Si elle échoue pour un seul couple, les variables ne sont pas indépendantes.

Exemple 7 :

L'indépendance des variables aléatoires se lit rapidement à l'aide de leur loi conjointe :

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes

$\mathbb{X} \backslash \mathbb{Y}$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} > y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} > y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} < y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} < y]),$
- ...

Cela provient essentiellement du fait que :

$$[\mathbb{Y} \leq y] = \bigcup_{\substack{y_j \in \mathbb{Y}(\Omega) \\ y_j \leq y}} [\mathbb{Y} = y_j]$$

et que $[\mathbb{X} = x]$ est indépendant de tout événement $[\mathbb{Y} = y_j]$.

De même, si on considère $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une variable aléatoire $\mathbb{X}_i$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

On a même mieux et c'est l'objet du très célèbre lemme des coalitions :

Lemme 6 – Lemme des coalitions :

Si $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors toute fonction de $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute fonction des $\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n$.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in \mathbb{X}_1(\Omega), \dots, x_n \in \mathbb{X}_n(\Omega)$:

- les événements $[\mathbb{X}_1 = x_1], [\mathbb{X}_2 \leq x_2], \dots, [\mathbb{X}_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- les événements $[\mathbb{X}_1 \leq x_1], [\mathbb{X}_2 > x_2], \dots, [\mathbb{X}_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- ...

Méthode 5 – Preuve de non-indépendance :

Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple *i.e.* trouver un couple $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \neq 0.$$

i Remarque
Un seul suffit !

Exemple 8 :

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes. En effet, on avait $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p), \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\text{et} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Ainsi :

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) = q^n$ et $\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = p^n$, donc $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = p^n q^n \neq 0$ car $p \in]0; 1[$.
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) = 0$, car $n \neq 0$

D'où, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Y} = 0]) \neq \mathbf{P}([\mathbb{X} = 0]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0])$ et les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 7 – (Test d'indépendance de deux variables)

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple tel que $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?

$$\text{On a } \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{D'autre part, } \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Comme } \mathbf{P}(\mathbb{X} = 1) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} = 1) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{18}, \text{ les variables } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

Exercice 8 – (Égalité et comparaison de variables géométriques)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0; 1[$.

Déterminer $\mathbf{P}(X = Y)$.

On a déjà

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(Y = n) = p(1-p)^{n-1}.$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X = n \cap X = Y)$ est convergente et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n \cap X = Y) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n \cap Y = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = n) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2 \left((1-p)^2 \right)^{n-1} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^2 \right)^k \\ &= p^2 \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} \\ &= \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{2-p}.$

Rappel

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N},$

$$(x^m)^2 = x^{2m} = (x^2)^m.$$

Théorème 7 :

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrètes.

T1 • Si $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) \neq 0$ alors

X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),$
 $\mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y) = \mathbf{P}(Y = y).$

T2 • Si $\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) \neq 0$ alors

X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),$
 $\mathbf{P}_{[Y=y]}(X = x) = \mathbf{P}(X = x).$

Exercice 9 – (Nombre aléatoire de lancers)

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

1. Donner la loi de $\mathbb{X}$.
2. Pour $k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0 ; 3 \rrbracket$, déterminer $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j])$.
3. Déterminer la loi de $\mathbb{Y}$.
4. Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont-elles indépendantes ?
5. On modifie l'expérience : après le tirage du jeton, on lance *toujours deux fois* la pièce, et on note $\mathbb{Y}'$ le nombre de « Pile » obtenus.
Montrer que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}'$ sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}')$.

1. Le jeton est tiré au hasard : $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1 ; 3 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket, \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{3}$ (loi uniforme).
2. Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on lance k fois une pièce équilibrée : $\mathbb{Y}$ suit alors la loi $\mathcal{B}\left(k; \frac{1}{2}\right)$. Donc

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} \binom{k}{j} \frac{1}{2^k} & \text{si } j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket \\ 0 & \text{si } j > k. \end{cases}$$

j	0	1	2	3
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=1]}([\mathbb{Y} = j])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=2]}([\mathbb{Y} = j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=3]}([\mathbb{Y} = j])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. On a $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 0 ; 3 \rrbracket$. La famille $([\mathbb{X} = k])_{k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $j \in \llbracket 0 ; 3 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = j]) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j]) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j]).$$

En lisant le tableau colonne par colonne :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 0]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{24}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 1]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{24},$$

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y} = 2]) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \right) = \frac{5}{24}, \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 3]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{24}.$$

On vérifie que $\frac{7 + 11 + 5 + 1}{24} = 1$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{3} \neq 0$: on peut utiliser le théorème. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ étaient indépendantes, on aurait $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = j])$ pour tous k et j .

Or,

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=1]}([\mathbb{Y} = 2]) = 0 \neq \frac{5}{24} = \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 2]).$$

Donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes. (Si on a tiré le jeton 1, on ne lance qu'une seule fois la pièce et on ne peut pas obtenir deux « Pile » : savoir que $\mathbb{X} = 1$ renseigne sur $\mathbb{Y}$.)

5. Quel que soit $k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket$, sachant $[\mathbb{X} = k]$ on lance deux fois la pièce, donc $\mathbb{Y}'$ suit la loi $\mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, quel que soit k :

$$\forall k \in \llbracket 1 ; 3 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0 ; 2 \rrbracket, \quad \mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}' = j]) = \binom{2}{j} \frac{1}{4}.$$

La formule des probabilités totales donne alors

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}' = j]) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \binom{2}{j} \frac{1}{4} = \binom{2}{j} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \binom{2}{j} \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y}' = j]) = \mathbf{P}([\mathbb{Y}' = j])$ pour tous k et j .

Comme $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) \neq 0$ pour tout k , le **théorème (7)** permet de conclure que $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}'$ sont indépendantes.

IV. OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Maintenant que nous savons caractériser un couple, nous pouvons déterminer la loi de nouvelles variables aléatoires construites à partir de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$, telles que leur somme, leur produit, leur minimum ou leur maximum.

IV.1 – Loi d'une somme

Proposition 8 – Loi d'une somme de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- $\forall z \in (\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z]) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ z-x \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = z-x])$
 $= \sum_{\substack{z-y \in \mathbb{X}(\Omega) \\ y \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = z-y] \cap [\mathbb{Y} = y]).$

On dit que la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est le produit de convolution (discret) des lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

 **Preuve :** L'événement $[\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z]$ se décompose selon le système complet d'événements $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$:

$$[\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z] = \bigcup_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} ([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z]) = \bigcup_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} ([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = z - x]).$$

Par incompatibilité de ces événements, la probabilité de la réunion est la somme des probabilités. 

Corollaire 9 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y} = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n - k).$$

Exemple 9 :

On considère deux variable aléatoire $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ telles que

$$\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket) \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket),$$

par exemple le résultat d'un lancer d'un dé à six faces et d'un dé à quatre faces.

Déterminons la loi de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

- L'univers est $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 4 \rrbracket$, muni de la probabilité uniforme $\mathbf{P}$.
- Les variables prennent leurs valeurs dans $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$.
- Ainsi, $(\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega) = \llbracket 2; 10 \rrbracket$.
- Soit $k \in \llbracket 2; 10 \rrbracket$. On a

$$[\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k] = \bigcup_{\substack{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket}} [\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = k - i].$$

Cette réunion est disjointe. Comme $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = k - i]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = i]) \mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Il suffit donc de compter le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 4 \rrbracket$ tels que $i + j = k$.

On obtient alors la loi de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de couples (i, j)	1	2	3	4	4	4	3	2	1
$\mathbf{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Théorème 10 – Stabilité des lois binomiales et de Poisson :

T1 • Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Alors,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p) \\ \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m; p) \\ \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies \mathbb{X} + \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n + m; p).$$

T2 • Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$.
Alors

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu) \\ \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{X} + \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

 **Preuve :**

T1 • Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, on a $(\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega) \subset \llbracket 0; m + n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 0; m + n \rrbracket$.

Comme la famille $([\mathbb{X} = i])_{i \in \llbracket 0; m \rrbracket}$ est un sce, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) &= \sum_{i=0}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k]) \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = k - i]) \\ &= \sum_{i=0}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = i])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in \llbracket 0; m \rrbracket}}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = i])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) + \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin \llbracket 0; m \rrbracket}}^m \mathbf{P}([\mathbb{X} = i])\mathbf{P}([\mathbb{Y} = k - i]) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} p^i (1-p)^{m-i} \binom{n}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k+i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in \llbracket 0; m \rrbracket}}^m \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \\ &= \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Vandermonde.

Ainsi, $\mathbb{X} + \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.

T2 • Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $(\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Rappel

Formule de Vandermonde :
 $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que
 $k \leq m + n$,
 $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$.

Comme la famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [X + Y = k]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = k - i]) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = k - i]) \quad (\text{par indépendance}) \\
 &= \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in \mathbb{Y}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = k - i]) + \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin \mathbb{Y}(\Omega)}}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = k - i]) \\
 &= \sum_{i=0}^k \mathbf{P}([X = i]) \mathbf{P}([Y = k - i]) \quad \text{car } (i \in \mathbb{N}) \cap (k - i \in \mathbb{N}) = (0 \leq i \leq k). \\
 &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} \\
 &= e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} (\lambda + \mu)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.}
 \end{aligned}$$

Finalement, $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.



Et si c'est vrai pour deux, c'est vrai pour $n \dots$ À condition de pouvoir conserver l'indépendance, et ça, c'est l'affaire du **lemme (??)** des coalitions.

Théorème 11 – Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson :

- T1** • Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^n n_k; p\right).$$

- T2** • Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_k) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

Idée
 $[Y = k - i] = \emptyset$ si
 $k - i \notin \mathbb{Y}(\Omega)$.

À retenir
 Cas particulier si les
 $n_k = 1$, on retrouve que
 la somme de n variables
 aléatoires indépendantes
 suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ est une
 variable aléatoire qui suit la
 loi $\mathcal{B}(n; p)$.

Preuve :**(Résultat admis)**

T1 • Supposons $\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (\mathbb{X}_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes.} \end{array} \right\}$

Et montrons, par récurrence sur $N \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ que $\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$.

— **Initialisation.** Pour $N = 2$, c'est ce que dit le **théorème (10)** :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{X}_1 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1; p) \\ \mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_2; p) \\ \mathbb{X}_1 \text{ et } \mathbb{X}_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2; p).$$

— **Hérédité.** Soit $N \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Supposons $\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$ et montrons

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{N+1} n_k; p\right).$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mathbb{X}_k = \sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{N+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$ et $\mathbb{X}_{N+1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_{N+1}; p)$.

Comme les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_N, \mathbb{X}_{N+1}$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\mathbb{X}_1 + \dots + \mathbb{X}_N$ et $\mathbb{X}_{N+1}$ sont également indépendantes.

C'est encore le **théorème (10)** qui nous donne le résultat : la variable aléatoire $\sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k + \mathbb{X}_{N+1}$

suit la loi $\mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{N+1} n_k; p\right)$.

L'hérédité est ainsi établie.

— **Conclusion.** $\forall N \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^N \mathbb{X}_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$.

T2 • On procède de la même façon.



Méthode 6 :

Pour déterminer la loi de $\mathbb{X} \pm \mathbb{Y}$ ou $|\mathbb{X} - \mathbb{Y}|$, on utilise la formule des probabilités totales (avec $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ ou $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$ comme sce) puis :

M1 • soit on connaît la loi jointe,

M2 • soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,

M3 • soit $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont indépendantes et on connaît leur loi.

Méthode

Le lemme des coalitions permet de généraliser, par récurrence, la stabilité d'une loi dans le cas de 2 variables aléatoires aux cas de n variables aléatoires.

Attention

Pour $\mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z])$, on obtiendra la somme des $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = z - x])$. Cette probabilité est nulle dès que $z - x \notin \mathbb{Y}(\Omega)$.

Exercice 10 – (Somme de deux variables géométriques indépendantes)

Soient $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables indépendantes ($p \in]0, 1[$).

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

$Z(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour $n \geq 2$, par le produit de convolution :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{n-k-1}) \\ &= p^2(n-1)(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

Z suit une loi binomiale négative (rang du second succès).

Exercice 11 – (Stabilité de la loi de Poisson et loi conditionnelle)

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables indépendantes.

Soit $Z = X + Y$.

1. Donner la loi de Z .
2. Sachant $[Z = n]$, déterminer la loi conditionnelle de X .

1. Par stabilité et indépendance, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
2. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on cherche $\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k)$:

$$\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k) = \frac{\mathbf{P}([X = k] \cap [X + Y = n])}{\mathbf{P}(Z = n)} = \frac{\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = n - k])}{\mathbf{P}(Z = n)}$$

Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}$$

Conclusion : Sachant $[Z = n]$, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

IV.2 – Loi d'un produit**Proposition 12 – Loi d'un produit de variables aléatoires :**

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

— XY est une variable aléatoire réelle discrète.

— La loi de $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est fournie par, $\forall z \in (\mathbb{X}\mathbb{Y})(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y} = z]) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{X}\mathbb{Y} = z]) = \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [x\mathbb{Y} = z])$$

ou

$$= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y} = z] \cap [\mathbb{Y} = y]) = \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([y\mathbb{X} = z] \cap [\mathbb{Y} = y]).$$

Le choix de l'introduction du sce $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$ ou $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ est guidé par les lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Méthode

On optera toujours pour le sce le plus simple.

Exercice 12 – (Produit de variables de Bernoulli)

Soient $\mathbb{X} \sim \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{Y} \sim \mathcal{B}(q)$ deux variables indépendantes ($p, q \in]0, 1[$).

Déterminer la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ et tester l'indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$.

— Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $\mathbb{X}\mathbb{Y}(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X}\mathbb{Y} = 1]) &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1] \cap [\mathbb{Y} = 1]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} = 1]) \quad \text{par indépendance} \\ &= pq. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{X}\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{B}(pq)$.

— De plus, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = 0] \cap [\mathbb{Z} = 1]) = 0 \neq \mathbf{P}(\mathbb{X} = 0)\mathbf{P}(\mathbb{Z} = 1) = (1 - p)pq$, donc $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas indépendantes.

IV.3 – Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 13 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

On note $F_{\mathbb{X}}$ et $F_{\mathbb{Y}}$ les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ et $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

T1 • — $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une variable aléatoire réelle discrète.

— La fonction de répartition de $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\mathbb{V}}(t) = F_{\mathbb{X}}(t)F_{\mathbb{Y}}(t).$$

T2 • — $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est une variable aléatoire réelle discrète.

— La fonction de répartition de $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{\mathbb{U}}(t) = 1 - (1 - F_{\mathbb{X}}(t))(1 - F_{\mathbb{Y}}(t)).$$

 **Preuve :** Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, [\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq t] &= [\mathbb{X} \leq t] \cap [\mathbb{Y} \leq t], \\ [\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > t] &= [\mathbb{X} > t] \cap [\mathbb{Y} > t]. \end{aligned}$$

D'après le **théorème (??)**, $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ sont des variables aléatoires réelles.

De plus,

À retenir

$$\max(x, y) \leq z \iff \begin{cases} x \leq z \\ y \leq z. \end{cases}$$

T1 • Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{V}}(t) &= \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq t) \\ &= \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq t) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq t] \cap [\mathbb{Y} \leq t]) \\ &= \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq t])\mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq t]) \quad (\text{car } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes}) \\ &= F_{\mathbb{X}}(t)F_{\mathbb{Y}}(t) \end{aligned}$$

À retenir

$$\min(x, y) > z \iff \begin{cases} x > z \\ y > z. \end{cases}$$

T2 • Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{U}}(t) &= \mathbf{P}(\mathbb{U} \leq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\mathbb{U} > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} > t] \cap [\mathbb{Y} > t]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([\mathbb{X} > t])\mathbf{P}([\mathbb{Y} > t]) \quad (\text{car } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ sont indépendantes}) \\ &= 1 - (1 - F_{\mathbb{X}}(t))(1 - F_{\mathbb{Y}}(t)) \end{aligned}$$



Remarque : Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles, on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que

$$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}).$$

Méthode 7 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- (i) calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y} > n)$;
- (ii) montrer que $\mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} > n) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = n) = \mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > n-1) - \mathbf{P}(\min(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) > n).$$

Exercice 13 – (Minimum de variables géométriques)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que $\mathbb{X} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0; 1[$.

Déterminer la loi de $\mathbb{U} = \min(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

On suit la **méthode (7)** :

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([X > n]) &= 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) \\
 &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n [X = k]\right) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]) \quad (\text{par incompatibilité des } [X = k]) \\
 &= 1 - \sum_{k=1}^n q_1^{k-1} p_1 \quad \text{où } q_1 = 1 - p_1 \\
 &= 1 - \frac{1 - q_1^n}{1 - q_1} p_1 = 1 - (1 - q_1^n) \\
 &= q_1^n.
 \end{aligned}$$

De même, $\mathbf{P}([Y > n]) = q_2^n$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([U > n]) &= \mathbf{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\
 &= \mathbf{P}([X > n])\mathbf{P}([Y > n]) \quad (\text{par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
 &= q_1^n q_2^n = (q_1 q_2)^n.
 \end{aligned}$$

(iii) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors $U(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $[U > n - 1] = [U = n] \cup [U > n]$, union de deux événements incompatibles.

On en déduit :

$$\mathbf{P}([U > n - 1]) = \mathbf{P}([U = n]) + \mathbf{P}([U > n])$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}([U = n]) &= \mathbf{P}([U > n - 1]) - \mathbf{P}([U > n]) \\
 &= (q_1 q_2)^{n-1} - (q_1 q_2)^n \\
 &= (q_1 q_2)^{n-1} (1 - q_1 q_2).
 \end{aligned}$$

Comme $q_1 q_2 \in]0; 1[$, on en déduit : $U \rightsquigarrow \mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.

Méthode 8 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\max(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

(i) calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)$, et de même pour $\mathbf{P}(Y \leq n)$;

(ii) montrer que $\mathbf{P}(\max(X, Y) \leq n) = \mathbf{P}(X \leq n) \times \mathbf{P}(Y \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(iii) conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(X, Y) = n) = \mathbf{P}(\max(X, Y) \leq n) - \mathbf{P}(\max(X, Y) \leq n - 1).$$

Exercice 14 – (Loi d'un maximum)

On reprend les notations de l'exercice (13) et on pose $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Déterminons la loi de $\mathbb{V}$.

On suit la méthode (8) :

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{V} \leq n) &= \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n \cap \mathbb{Y} \leq n) \\ &= \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n) \quad (\text{par indépendance de } \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y}) \\ &= (1 - q_1^n)(1 - q_2^n) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n.\end{aligned}$$

(iii) Comme $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors $\mathbb{V}(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $[\mathbb{V} \leq n] = [\mathbb{V} = n] \cup [\mathbb{V} \leq n - 1]$, union de deux événements incompatibles.

On en déduit :

$$\mathbf{P}(\mathbb{V} \leq n) = \mathbf{P}(\mathbb{V} = n) + \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq n - 1)$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbb{V} = n) &= \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq n) - \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq n - 1) \\ &= -q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n + q_1^{n-1} + q_2^{n-1} - (q_1 q_2)^{n-1} \\ &= q_1^{n-1}(1 - q_1) + q_2^{n-1}(1 - q_2) - (q_1 q_2)^{n-1}(1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$

Exercice 15 – (Maximum de variables uniformes discrètes)

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 1$). On pose $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(\mathbb{V} \leq k)$.
2. En déduire la loi de $\mathbb{V}$, c'est-à-dire $\mathbf{P}(\mathbb{V} = k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. $[\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq k] = [\mathbb{X} \leq k] \cap [\mathbb{Y} \leq k]$. Par indépendance :

$$\mathbf{P}(\mathbb{V} \leq k) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq k) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$$

2. Pour $k = 1$: $\mathbf{P}(\mathbb{V} = 1) = \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq 1) = \frac{1}{n^2}$.

Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{V} = k) = \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq k) - \mathbf{P}(\mathbb{V} \leq k - 1) = \frac{k^2 - (k - 1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}$$

V. BILAN ET COMPÉTENCES ATTENDUES

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple.
- savoir déterminer une loi marginale connaissant une loi conditionnelle.

- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement) à l'aide de la connaissance de la loi de la variable aléatoire réelle adéquate.
- savoir démontrer que deux variables aléatoires réelles $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont non indépendantes en exhibant un couple $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$ qui met en défaut la propriété d'indépendance.
(on exhibe un couple particulier, on ne cherche en aucun cas tous les couples qui mettent en défaut la propriété)
- savoir déterminer la loi d'une v.a.r. $\mathbb{Z} = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans les cas particuliers classiques.
Plus précisément, savoir déterminer la loi d'une somme $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ / d'une différence $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$ / d'une distance $|\mathbb{X} - \mathbb{Y}|$ / d'un produit $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ de deux variables aléatoires réelles .
Pour ce faire, on testera l'événement $[\mathbb{Z} = z]$ en fonction du sce $([\mathbb{X} = x])_{x \in \mathbb{X}(\Omega)}$ ou du sce $([\mathbb{Y} = y])_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)}$ (on choisira le sce le plus simple) et on déterminera la probabilité de $\mathbb{P}([\mathbb{Z} = z])$ à l'aide de la FPT.
- savoir déterminer la loi du max ou du min de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (en particulier la loi du min de deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$)

INDEX

- Couple
 - de variables aléatoires, 3
- Formule
 - des probabilités totales, 14
- Lemme
 - des coalitions, 18
- Loi
 - binomiale, 22, 24
 - conditionnelle, 13–16
 - conjointe, 2, 3, 7, 11, 12
 - d'un maximum de variables aléatoires , 27, 29, 30
 - d'un minimum de variables aléatoires , 27, 28
 - d'un produit de variables aléatoires , 27
 - d'une somme de variables aléatoires , 21
 - de Poisson, 23, 24, 26
 - géométrique, 12, 19, 26
 - Minimum de, 28
 - marginale, 2, 4, 5, 7, 11, 12, 14, 16
- Produit
 - de convolution, 21
- SCE:« Système complet d'événements », 5, 25, 27
- SCE:« Système complet d'événements », 6
- Suite
 - double, 10
- Théorème
 - de Fubini-Tonelli, 10
- Variable aléatoire
 - indépendante, 16