

Couple de Variables aléatoires discrètes

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 5



- 1 Couple de variables aléatoires discrètes
- 2 Lois conditionnelles
- 3 Indépendance de variables aléatoires
- 4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes
- 5 Bilan et compétences attendues



Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1 Couple de variables aléatoires discrètes

- Lois conjointe et marginales
- Fondations et séries doubles

2 Lois conditionnelles

3 Indépendance de variables aléatoires

4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes

5 Bilan et compétences attendues



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.

Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6.

- On en tire une et on note son numéro X .
- On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X .
- On tire une nouvelle boule dont le numéro est Y .

Le support de chacune de ces variables aléatoires réelles est $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$. Ω désignant l'ensemble des tirages sans remise de l'urne.

Ω est donc l'ensemble des 2-arrangements de l'ensemble formé des 6 boules de l'urne.

Le couple (X, Y) est une nouvelle variable aléatoire de support $\llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 6 \rrbracket$.

On veut déterminer la loi de (X, Y) .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$,
$$P((X = i) \cap (Y = j)).$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Or, } P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Cela revient à chercher, pour tout couple $(i; j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$,

$$P((X = i) \cap (Y = j)).$$

$$\text{Or, } P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i) \times P_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{6} \times \frac{1}{i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}.$$

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	$P(X = k)$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P(Y = k)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	$P(X = k)$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(Y = k)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite **conjointe**, du couple (X, Y) .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	$P(X = k)$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(Y = k)$	$\frac{49}{120}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{37}{360}$	$\frac{11}{180}$	$\frac{1}{36}$	1

Commentaires :

- Ce tableau donne la loi, dite **conjointe**, du couple (X, Y) .
- Les marges (obtenues en sommant les valeurs) comportent les lois de X et de Y . On les appellera donc les lois **marginales**.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Définition 1 – Couple de variables aléatoires :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

On appelle **couple de variables aléatoires**, noté $Z = (X; Y)$, l'application

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega); Y(\omega)). \end{aligned}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Exemple 1 – Min et Max :

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

- On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats obtenus.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Exemple 1 – Min et Max :

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.

- On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux résultats obtenus.
- On note Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux résultats obtenus.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Exemple 1 – Min et Max :

Rapidement et facilement :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket .$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

1. Introduction

Exemple 1 – Min et Max :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket .$$

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	$P(X=i)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$P(Y=j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Définition 2 – Loi conjointe et lois marginales :

D1 ■ On appelle **loi du couple aléatoire** (X, Y) (ou **loi conjointe** de (X, Y)) la donnée de la fonction

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ (x; y) &\longmapsto \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]). \end{aligned}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Définition 2 – Loi conjointe et lois marginales :

D1 ■ On appelle **loi du couple aléatoire** $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ (ou **loi conjointe** de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$) la donnée de la fonction

$$\begin{aligned} F_{(\mathbb{X}, \mathbb{Y})} : \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ (x; y) &\longmapsto \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]). \end{aligned}$$

D2 ■ La loi de $\mathbb{X}$ est appelée la première **loi marginale** du couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, et la loi de $\mathbb{Y}$ la seconde **loi marginale** de $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Méthode 1 – Déterminer la loi conjointe d'un couple :

Déterminer la loi jointe de (X, Y) c'est :

- préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Méthode 1 – Déterminer la loi conjointe d'un couple :

Déterminer la loi jointe de (X, Y) c'est :

- préciser $\mathcal{X}(\Omega)$ et $\mathcal{Y}(\Omega)$.
- déterminer $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tous $x \in \mathcal{X}(\Omega)$ et $y \in \mathcal{Y}(\Omega)$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

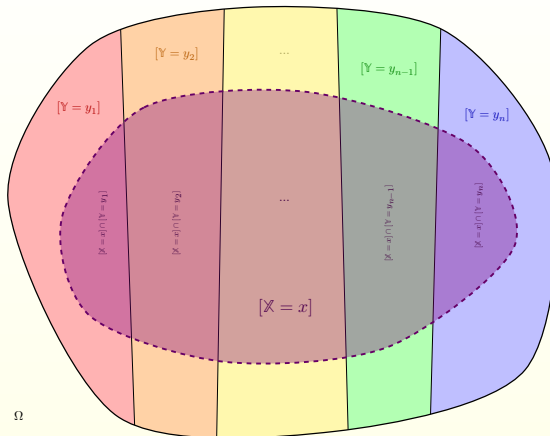


Figure : Loi des probabilités totales pour $[X = x]$ à travers le sce $([Y = y])_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)}$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Proposition 1 – Lois marginales :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Proposition 1 – Lois marginales :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Méthode 2 – Déterminer les lois marginales à partir de la loi conjointe :

Par exemple, on obtient la loi de Y en utilisant la formule des probabilités totales avec $([X = x])_{x \in \mathcal{X}(\Omega)}$ comme système complet d'évènements :

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([Y = y]) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

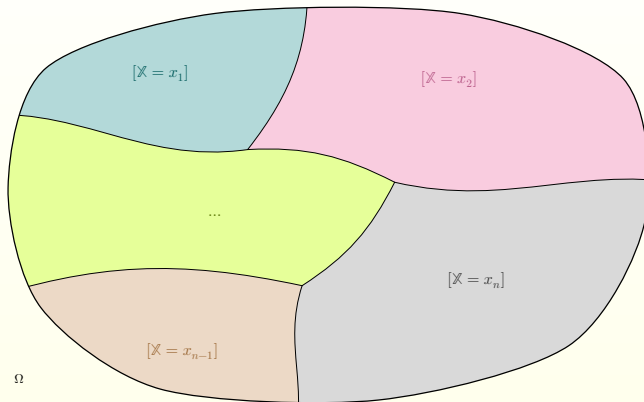


Figure : Le sce $([X = x])_{x \in \mathcal{X}(\Omega)}$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Proposition 2 – SCE associé à un couple :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

P1 ■ La famille $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Proposition 2 – SCE associé à un couple :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω .

P1 ▪ La famille $([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

P2 ▪ La série double $\sum_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

⚠ Attention

La réciproque est fautive : si on connaît les lois marginales, on ne peut déterminer la loi conjointe.

Proposition 2 – SCE associé à un couple :

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables discrètes définies sur Ω .

P1 ▪ La famille $([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

P2 ▪ La série double $\sum_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.

Moralité :

- La loi conjointe contient **toute** l'information du couple : elle permet de retrouver de manière unique les deux lois marginales.
- La connaissance des lois marginales seules **ne suffit pas** à reconstituer la loi conjointe, sauf dans le cas très particulier où les variables sont indépendantes.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

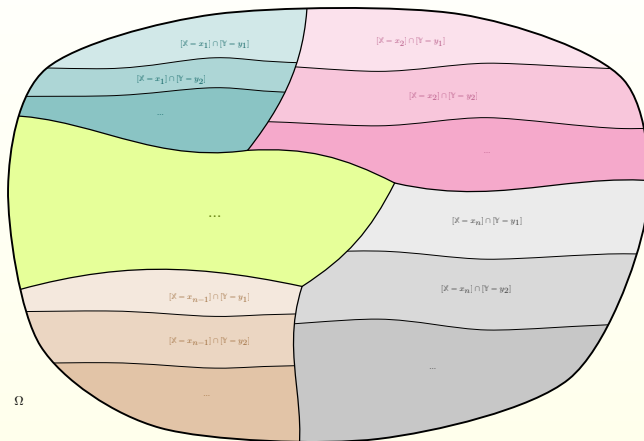


Figure : Le sce $([X = x] \cap [Y = y])_{(x;y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)}$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- 1 Déterminer la valeur de la constante a .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- ❶ Déterminer la valeur de la constante a .

Correction : Les événements $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2}$ forment un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

On calcule la somme :

$$a \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (i + j) = a \left(\sum_{i=1}^3 \left(3i + \sum_{j=1}^3 j \right) \right) = a (3(1 + 2 + 3) + 3(1 + 2 + 3)) = 36a$$

$$\text{D'où } 36a = 1, \text{ soit } a = \frac{1}{36}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- ② Présenter la loi conjointe du couple (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- ② Présenter la loi conjointe du couple (X, Y) sous la forme d'un tableau à deux entrées.

Correction : Le tableau de la loi conjointe est le suivant :

$X \setminus Y$	1	2	3	$\mathbf{P}(X = i)$
1	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{9}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{12}{36}$
3	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
$\mathbf{P}(Y = j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$	1



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- ③ En déduire les lois marginales de X et de Y .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exercice 1 – Détermination d'une loi conjointe et lois marginales :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Un couple de variables aléatoires (X, Y) prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ et sa loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \cdot (i + j)$$

- ③ En déduire les lois marginales de X et de Y .

Correction : Par sommation sur les lignes et les colonnes, on obtient les lois marginales de X et de Y :

- $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

X	1	2	3
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$

- $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ avec la même loi par symétrie :

Y	1	2	3
$\mathbf{P}(Y = k)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{15}{36}$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales



Certaines $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nulles sans que ni $\mathbf{P}([X = x])$ ni $\mathbf{P}([Y = y])$ ne le soient.

Exemple 2 – Loi marginales à partir de la loi conjointe :

En reprenant l' exemple (1) et en sommant par colonne et par ligne, on obtient :

■ la loi de X : $X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([X = i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}[\llbracket 1; 6 \rrbracket].$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales



Certaines $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nulles sans que ni $\mathbf{P}([X = x])$ ni $\mathbf{P}([Y = y])$ ne le soient.

Exemple 2 – Loi marginales à partir de la loi conjointe :

En reprenant l' exemple (1) et en sommant par colonne et par ligne, on obtient :

- la loi de X : $X(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([X = i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}[\llbracket 1; 6 \rrbracket].$$

- la loi de Y : $Y(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}([Y = j])$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$Y \rightsquigarrow ?.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$. On note :

- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.

Déterminons les lois de X et Y puis celle du couple (X, Y) .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

- Loi de X : L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p . La variable aléatoire X prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des n répétitions.

Par conséquent : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

- Loi de X : L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p . La variable aléatoire X prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des n répétitions.

Par conséquent : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$.

- Loi de Y : De la même manière, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

- Loi de X : L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p . La variable aléatoire X prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des n répétitions.
Par conséquent : $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$.
- Loi de Y : De la même manière, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$.
- Loi jointe de (X, Y) : On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

- Loi jointe de (X, Y) : On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

En remarquant que la somme des PILE et des FACES est toujours constant à n , pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, on a :

- si $i + j \neq n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$, et $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$.
- si $i + j = n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = [X = i] \cap [Y = n - i]$
 $= [X = i] \cap [X = i] = [X = i]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbf{P}([X = i]) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} p^i q^j \quad (q = 1-p \quad \text{et} \quad i + j = n). \end{aligned}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 3 :

- Loi jointe de (X, Y) : On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.
En remarquant que la somme des PILE et des FACES est toujours constant à n , pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, on a :

- si $i + j \neq n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = \emptyset$, et $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$.
- si $i + j = n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = [X = i] \cap [Y = n - i]$
$$= [X = i] \cap [X = i] = [X = i].$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbf{P}([X = i]) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} p^i q^j \quad (q = 1-p \quad \text{et} \quad i + j = n). \end{aligned}$$

Conclusion, pour la loi jointe $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^j & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 4 :

On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$.

On note X et Y les variables aléatoires respectivement égales aux rangs du premier PILE et du second PILE.

Déterminons la loi jointe du couple (X, Y) .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 4 :

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement « obtenir PILE au k -ième lancer » et $F_k = \overline{P_k}$.

Considérons déjà que $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

- Si $i \geq j$: Il est impossible d'obtenir le second PILE à un rang inférieur ou égal à celui du premier PILE.

Ainsi, $[\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j] = \emptyset$ et donc $\mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = 0$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 4 :

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k l'évènement « obtenir PILE au k -ième lancer » et $F_k = \overline{P_k}$.

Considérons déjà que $\mathcal{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{Y}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket$.

- Si $i \geq j$: Il est impossible d'obtenir le second PILE à un rang inférieur ou égal à celui du premier PILE.
Ainsi, $[\mathcal{X} = i] \cap [\mathcal{Y} = j] = \emptyset$ et donc $\mathbf{P}([\mathcal{X} = i] \cap [\mathcal{Y} = j]) = 0$.
- Si $i < j$: $[\mathcal{X} = i] \cap [\mathcal{Y} = j]$ signifie qu'on obtient FACE aux lancers 1 à $i - 1$, PILE au i -ème, FACE aux lancers $i + 1$ à $j - 1$, et PILE au j -ème lancer.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 4 :

D'où,

$$[\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k \right) \cap P_j.$$

Et par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1-p) \right) \times p \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p) \right) \times p \\ &= (1-p)^{i-1} p (1-p)^{j-i-1} p = p^2 (1-p)^{j-2}. \end{aligned}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

2. Lois conjointe et marginales

Exemple 4 :

D'où,

$$[\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k \right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k \right) \cap P_j.$$

Et par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1-p) \right) \times p \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1-p) \right) \times p \\ &= (1-p)^{i-1} p (1-p)^{j-i-1} p = p^2 (1-p)^{j-2}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\mathbb{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Y}(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket$ et

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} p^2 (1-p)^{j-2} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Définition 3 – Suite double :

On appelle **suite double** (réelle), notée $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$, toute fonction

$$u : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

11/03/2020

« Le théorème de Fubini-Tonelli permet d'échanger l'ordre des sommations infinies sans risque d'erreur, sous réserve que tous les termes manipulés soient positifs. »

Théorème 3 – Théorème de Fubini-Tonelli (admis) :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes positifs.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \geq 0, \\ \bullet \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j \text{ converge,} \end{array} \right.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Théorème 3 – Théorème de Fubini-Tonelli (admis) :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes positifs.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \geq 0, \\ \bullet \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j \text{ converge,} \end{array} \right.$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \text{ converge,} \end{array} \right.$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Théorème 3 – Théorème de Fubini-Tonelli (admis) :

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes positifs.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{i,j} \geq 0, \\ \bullet \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} s_j \text{ converge,} \end{array} \right.$

alors $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{j \in \mathbb{N}} u_{i,j} \text{ converge vers } t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}, \\ \bullet \quad \text{la série } \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \text{ converge,} \end{array} \right.$

et les sommes doubles satisfont :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 2 – Sommation double :

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 2 – Sommation double :

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i; j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} \geq 0$.

■ Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé :
$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^j} = s_j.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 2 – Sommation double :

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i; j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} \geq 0$.

- Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé : $\sum_{i=0}^N \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^j} = s_j$.
- La série $\sum_{j \geq 0} s_j = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{2^j}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc elle converge.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 2 – Sommation double :

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i; j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} \geq 0$.

- Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé : $\sum_{i=0}^N \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^j} = s_j$.
- La série $\sum_{j \geq 0} s_j = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{2^j}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc elle converge.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 2 – Sommation double :

Montrer que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $(i; j) \in \mathbb{N}^2$, posons $u_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} \geq 0$.

■ Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé : $\sum_{i=0}^N \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^j} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^j} = s_j$.

■ La série $\sum_{j \geq 0} s_j = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{2^j}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc elle converge.

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la série double converge et :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{2^j} = 2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Théorème 4 – Fondation :

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables. Si $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une suite double **positive** telle que $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1$, alors pour toutes familles de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de variables aléatoires sur Ω tels que :

$$\blacksquare \mathbb{X}(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, \mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j, j \in J\}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Théorème 4 – Fondation :

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables. Si $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une suite double **positive** telle que $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j} = 1$, alors pour toutes familles de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un couple $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ de variables aléatoires sur Ω tels que :

- $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, \mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j, j \in J\}.$
- $\forall (i, j) \in I \times J, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]) = p_{i,j}.$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exemple 5 :

Dans l' [exercice \(2\)](#) , on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4.

Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

On a ainsi :

$$\blacksquare \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} \geq 0,$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exemple 5 :

Dans l' [exercice \(2\)](#) , on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4.

Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

On a ainsi :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} \geq 0,$
- la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exemple 5 :

Dans l' [exercice \(2\)](#) , on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4.

Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{i+j+2}}.$$

On a ainsi :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} \geq 0,$
- la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.

Conclusion, la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 3 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 3 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

■ **Loi de X** : Par la FPT avec $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbf{P}([X = i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j} j!} = \frac{a}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{a}{2^i} e^{\frac{1}{2}}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 3 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

■ **Loi de X** : Par la FPT avec $([Y = j])_{j \in \mathbb{N}}$:

$$\mathbf{P}([X = i]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j} j!} = \frac{a}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} = \frac{a}{2^i} e^{\frac{1}{2}}.$$

■ **Valeur de a** : Comme $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i]) = 1$,

$$ae^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \iff ae^{\frac{1}{2}} \times 2 = 1 \iff a = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}.$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 3 – Loi conjointe et constantes inconnues :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j}j!}.$$

Déterminer la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

■ **Conclusion :** $\mathbf{P}([X = i]) = \frac{1}{2^{i+1}}$ i.e. $X + 1 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$, et pour Y :

$$\mathbf{P}([Y = j]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{i+j+1}j!} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1}j!} \times 2 = e^{-\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{2})^j}{j!} \Rightarrow Y \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right).$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

- ❶ Montrer que la série double converge et déterminer la valeur de c pour que cette famille de réels définisse une loi de probabilité conjointe.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

❶ Montrer que la série double converge et déterminer la valeur de c pour que cette famille de réels définisse une loi de probabilité conjointe.

❷ Par séparation des variables dans la somme géométrique :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c}{2^i \cdot 3^j} = c \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \right) \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j \right)$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{1}{2}.$$

La somme vaut donc $c \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{c}{2}$. Pour obtenir une loi de probabilité, il faut $\frac{c}{2} = 1$, d'où $c = 2$.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

- ② Déterminer la loi marginale de X , puis celle de Y .



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

❶ Déterminer la loi marginale de X , puis celle de Y .

❷ Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{2^i \cdot 3^j} = \frac{2}{2^i} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{2}{3^j} \times 1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$$



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

- ③ Reconnaître des lois usuelles.



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

③ Reconnaître des lois usuelles.

④ On reconnaît que :

- $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ (loi géométrique de paramètre $p_1 = \frac{1}{2}$).



I. Couple de variables aléatoires discrètes

3. Fondations et séries doubles

Exercice 4 – Loi conjointe sur un support infini :

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{c}{2^i \cdot 3^j}$$

③ Reconnaître des lois usuelles.

④ On reconnaît que :

- $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ (loi géométrique de paramètre $p_1 = \frac{1}{2}$).
- $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$ (loi géométrique de paramètre $p_2 = \frac{2}{3}$).



II. Lois conditionnelles

- 1 Couple de variables aléatoires discrètes
- 2 Lois conditionnelles**
- 3 Indépendance de variables aléatoires
- 4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes
- 5 Bilan et compétences attendues



II. Lois conditionnelles

Si $P(A) \neq 0$ alors

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dans de nombreux problèmes, les variables X et Y n'ont pas des rôles symétriques : l'un des deux dépend explicitement du résultat obtenu par l'autre. La notion de loi conditionnelle traduit cette dépendance.

Définition 4 – Lois conditionnelles :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

D1 ■ Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application

$$\begin{aligned} F_{[Y=y]} : X(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P_{[Y=y]}([X = x]). \end{aligned}$$



II. Lois conditionnelles

Si $P(A) \neq 0$ alors

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Dans de nombreux problèmes, les variables X et Y n'ont pas des rôles symétriques : l'un dépend explicitement du résultat obtenu par l'autre. La notion de loi conditionnelle traduit cette dépendance.

Définition 4 – Lois conditionnelles :

Soient X et Y deux variables discrètes définies sur Ω .

D1 ■ Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P([Y = y]) \neq 0$. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est l'application

$$\begin{aligned} F_{[Y=y]} : X(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ x &\longmapsto P_{[Y=y]}([X = x]). \end{aligned}$$

D2 ■ Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P([X = x]) \neq 0$. La loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est l'application

$$\begin{aligned} F_{[X=x]} : Y(\Omega) &\longrightarrow [0; 1] \\ y &\longmapsto P_{[X=x]}([Y = y]). \end{aligned}$$



II. Lois conditionnelles

Méthode 3 – Déterminer une loi conditionnelle :

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, on donne :

- $X(\Omega)$.



Méthode 3 – Déterminer une loi conditionnelle :

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, on donne :

- $X(\Omega)$.
- $P_{[Y=y]}([X = x])$ pour tous $x \in X(\Omega)$.



II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.

On tire successivement 2 boules donc sans remise.

On note X la variable aléatoire définie par $X = 0$ si la première boule est noire et $X = 1$ si elle est blanche.

On définit Y de la même façon pour la deuxième boule.

Déterminons la loi du couple (X, Y) , les lois marginales, puis les lois conditionnelles.



II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

- Loi de probabilité du couple (X, Y) :

	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	Total
$(X = 0)$	$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$(X = 1)$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1



II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

- Loi de probabilité du couple (X, Y) :

	$(Y = 0)$	$(Y = 1)$	Total
$(X = 0)$	$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$(X = 1)$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
Total	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

- Lois marginales :

x	0	1
$P([X = x])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

et

y	0	1
$P([Y = y])$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$



II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

Loi de probabilité de Y :

■ conditionnée par $[X = 0]$:

y	0	1
$\mathbf{P}_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

Loi de probabilité de Y :

■ conditionnée par $[X = 0]$:

y	0	1
$P_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■ conditionnée par $[X = 1]$:

y	0	1
$P_{(X=1)}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

Loi de probabilité de Y :

■ conditionnée par $[X = 0]$:

y	0	1
$P_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■ conditionnée par $[X = 1]$:

y	0	1
$P_{(X=1)}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

II. Lois conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

Loi de probabilité de Y :

■ conditionnée par $[X = 0]$:

y	0	1
$P_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■ conditionnée par $[X = 1]$:

y	0	1
$P_{(X=1)}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Loi de probabilité de X :

■ conditionnée par $[Y = 0]$:

x	0	1
$P_{(Y=0)}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$



II. Loïs conditionnelles

Exemple 6 – Un cas fini simple pour bien comprendre :

Loi de probabilité de Y :

■ conditionnée par $[X = 0]$:

y	0	1
$P_{(X=0)}([Y = y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■ conditionnée par $[X = 1]$:

y	0	1
$P_{(X=1)}([Y = y])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Loi de probabilité de X :

■ conditionnée par $[Y = 0]$:

x	0	1
$P_{(Y=0)}([X = x])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

■ conditionnée par $[Y = 1]$:

x	0	1
$P_{(Y=1)}([X = x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



II. Lois conditionnelles

Proposition 5 – Détermination des lois marginales à partir des lois conditionnelles :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

■ Loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}\forall (x; y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\ &= \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]).\end{aligned}$$



On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.

Proposition 5 – Détermination des lois marginales à partir des lois conditionnelles :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

■ Loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}\forall (x; y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\ &= \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]).\end{aligned}$$

■ Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$: Si $\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y]) \neq 0$ alors

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]).$$



On retiendra que pour obtenir une loi marginale à partir de la loi du couple ou d'une loi conditionnelle, il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales.

Proposition 5 – Détermination des lois marginales à partir des lois conditionnelles :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

■ Loi du couple (X, Y) :

$$\begin{aligned}\forall (x; y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) &= \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]) \\ &= \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]).\end{aligned}$$

■ Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$: Si $\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y]) \neq 0$ alors

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([Y = y]) \mathbf{P}_{[Y=y]}([X = x]).$$

■ Loi de Y via les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$: Si $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) \neq 0$ alors

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x]) \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]).$$



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,
- et la loi de X ,



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,
- et la loi de X ,

alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,
- et la loi de X ,

alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Mais aussi, $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \times \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y])$ donc si on connaît :

- la loi de X ,



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,
- et la loi de X ,

alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Mais aussi, $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \times \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y])$ donc si on connaît :

- la loi de X ,
- la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$,



II. Lois conditionnelles

Remarque : Soit $x \in \mathbb{X}(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}([X = x]) \neq 0$.

Par définition, $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbf{P}([X = x])}$.

Ainsi, si on connaît :

- la loi du couple (X, Y) ,
- et la loi de X ,

alors on obtient la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$.

Mais aussi, $\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \times \mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y])$ donc si on connaît :

- la loi de X ,
- la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$,

alors on obtient la loi du couple (X, Y) .



II. Lois conditionnelles

Exercice 5 – Application aux processus de tirages complexes (Loi de Poisson conditionnée) :

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) le nombre de baguettes magiques produites en une heure. Chaque baguette a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être défectueuse, indépendamment des autres. Soit Y le nombre de baguettes défectueuses.

- 1 Préciser la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.



II. Loïs conditionnelles

Exercice 5 – Application aux processus de tirages complexes (Loi de Poisson conditionnée) :

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) le nombre de baguettes magiques produites en une heure. Chaque baguette a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être défectueuse, indépendamment des autres. Soit Y le nombre de baguettes défectueuses.

- 1 Préciser la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2 En déduire la loi marginale de Y .

- 1 Sachant $[X = n]$, $Y \underset{[X=n]}{\sim} \mathcal{B}(n, p)$.



II. Loïs conditionnelles

Exercice 5 – Application aux processus de tirages complexes (Loi de Poisson conditionnée) :

Soit $\mathbb{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) le nombre de baguettes magiques produites en une heure. Chaque baguette a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être défectueuse, indépendamment des autres. Soit $\mathbb{Y}$ le nombre de baguettes défectueuses.

- ❶ Préciser la loi conditionnelle de $\mathbb{Y}$ sachant $[\mathbb{X} = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- ❷ En déduire la loi marginale de $\mathbb{Y}$.

❶ Sachant $[\mathbb{X} = n]$, $\mathbb{Y} \underset{[\mathbb{X}=n]}{\sim} \mathcal{B}(n, p)$.

❷ Pour $k \in \mathbb{N}$, par la FPT avec $([\mathbb{X} = n])_{n \geq k}$:

$$\mathbf{P}(\mathbb{Y} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}.$$

Ainsi, $\mathbb{Y} \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.



II. Lois conditionnelles

Méthode 4 – Déterminer une loi conjointe à partir des lois marginales :

Pour déterminer la loi d'un couple (X, Y) lorsque l'expérience comporte deux étapes successives, il suffit de déterminer :

- la loi de X , puis les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$,



II. Lois conditionnelles

Méthode 4 – Déterminer une loi conjointe à partir des lois marginales :

Pour déterminer la loi d'un couple (X, Y) lorsque l'expérience comporte deux étapes successives, il suffit de déterminer :

- la loi de X , puis les lois conditionnelles de Y sachant $[X = x]$,
- puis la loi conjointe par multiplication :

$$\mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}_{[X=x]}(Y = y).$$



II. Lois conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

- 1 Donner, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.



II. Loïs conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

❶ Donner, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

❷ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sachant $[X = k]$, $Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, k \rrbracket)$. Donc :

$$\mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ 0, & \text{si } j > k. \end{cases}$$



II. Lois conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

- 2 Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .



II. Lois conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

② Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .

② Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{nk} & \text{si } 1 \leq j \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



II. Lois conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

- ③ Déterminer la loi marginale de Y .



II. Lois conditionnelles

Exercice 6 – Loi fille et loi mère :

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Lorsque l'événement $[X = k]$ est réalisé (avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), la variable Y suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k \rrbracket$.

❶ Déterminer la loi marginale de Y .

❷ Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, $Y = j$ est réalisé si et seulement si $X \geq j$. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(Y = j) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^n \mathbf{P}([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k}$$



III. Indépendance de variables aléatoires

- 1 Couple de variables aléatoires discrètes
- 2 Lois conditionnelles
- 3 Indépendance de variables aléatoires**
- 4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes
- 5 Bilan et compétences attendues



III. Indépendance de variables aléatoires

Définition 5 – Variables aléatoires indépendantes :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . X et Y sont dites **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbf{P}([X = x]) \times \mathbf{P}([Y = y]).$$



III. Indépendance de variables aléatoires



Attention

Pour que deux variables soient indépendantes, l'égalité de factorisation doit être vérifiée pour **tous** les couples $(x, y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$.

Si elle échoue pour un seul couple, les variables ne sont pas indépendantes.

Définition 5 – Variables aléatoires indépendantes :

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur Ω . $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont dites **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega), \quad \mathbf{P}([\mathcal{X} = x] \cap [\mathcal{Y} = y]) = \mathbf{P}([\mathcal{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathcal{Y} = y]).$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 7 :

L'indépendance des variables aléatoires se lit rapidement à l'aide de leur loi conjointe :

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	Total
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Total	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable X est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable Y .



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

$$\blacksquare \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} > y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} > y]),$



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} > y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} > y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} < y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} < y]),$



III. Indépendance de variables aléatoires

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{X}$ est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable $\mathbb{Y}$.

Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{X}(\Omega)$, pour tout $y \in \mathbb{Y}(\Omega)$:

- $\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} \leq y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} \leq y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x] \cap [\mathbb{Y} > y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} > y]),$
- $\mathbf{P}([\mathbb{X} > x] \cap [\mathbb{Y} < y]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} > x]) \times \mathbf{P}([\mathbb{Y} < y]),$
- ...



III. Indépendance de variables aléatoires

On a même mieux et c'est l'objet du très célèbre lemme des coalitions :

Lemme 1 – Lemme des coalitions :

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors toute fonction de $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.



III. Indépendance de variables aléatoires

On a même mieux et c'est l'objet du très célèbre lemme des coalitions :

Lemme 1 – Lemme des coalitions :

Si $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors toute fonction de $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute fonction des $\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n$.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in \mathbb{X}_1(\Omega), \dots, x_n \in \mathbb{X}_n(\Omega)$:

- les événements $[\mathbb{X}_1 = x_1], [\mathbb{X}_2 \leq x_2], \dots, [\mathbb{X}_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,



III. Indépendance de variables aléatoires

On a même mieux et c'est l'objet du très célèbre lemme des coalitions :

Lemme 1 – Lemme des coalitions :

Si $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors toute fonction de $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_p$ est indépendante de toute fonction des $\mathbb{X}_{p+1}, \dots, \mathbb{X}_n$.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in \mathbb{X}_1(\Omega), \dots, x_n \in \mathbb{X}_n(\Omega)$:

- les événements $[\mathbb{X}_1 = x_1], [\mathbb{X}_2 \leq x_2], \dots, [\mathbb{X}_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- les événements $[\mathbb{X}_1 \leq x_1], [\mathbb{X}_2 > x_2], \dots, [\mathbb{X}_n \leq x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- ...



III. Indépendance de variables aléatoires

Méthode 5 – Preuve de non-indépendance :

Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple *i.e.* trouver un couple $(x, y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = x]) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y} = y]) \neq 0.$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 8 :

Les variables aléatoires X et Y introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 8 :

Les variables aléatoires X et Y introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes.

En effet, on avait $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\text{et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 8 :

Les variables aléatoires X et Y introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes.

En effet, on avait $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\text{et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Ainsi :

- $\mathbf{P}([X = 0]) = q^n$ et $\mathbf{P}([Y = 0]) = p^n$, donc $\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]) = p^n q^n \neq 0$ car $p \in]0; 1[$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 8 :

Les variables aléatoires X et Y introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes.

En effet, on avait $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\text{et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Ainsi :

- $\mathbf{P}([X = 0]) = q^n$ et $\mathbf{P}([Y = 0]) = p^n$, donc $\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]) = p^n q^n \neq 0$ car $p \in]0; 1[$.
- $\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0$, car $n \neq 0$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exemple 8 :

Les variables aléatoires X et Y introduites dans l'exemple (4) ne sont pas indépendantes.

En effet, on avait $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; q)$

$$\text{et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n. \end{cases}$$

Ainsi :

- $\mathbf{P}([X = 0]) = q^n$ et $\mathbf{P}([Y = 0]) = p^n$, donc $\mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0]) = p^n q^n \neq 0$ car $p \in]0; 1[$.
- $\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0$, car $n \neq 0$

D'où, $\mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) \neq \mathbf{P}([X = 0]) \times \mathbf{P}([Y = 0])$ et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 7 – Test d'indépendance de deux variables :

Soit (X, Y) un couple tel que $\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 7 – Test d'indépendance de deux variables :

Soit (X, Y) un couple tel que $P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$$\text{On a } P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 7 – Test d'indépendance de deux variables :

Soit (X, Y) un couple tel que $P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$$\text{On a } P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{D'autre part, } P(X = 1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } P(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 7 – Test d'indépendance de deux variables :

Soit (X, Y) un couple tel que $P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{36}(i + j)$ sur $\{1, 2, 3\}^2$.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$$\text{On a } P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{D'autre part, } P(X = 1) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ et } P(Y = 1) = \frac{1}{4}.$$

Comme $P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{18}$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 8 – Égalité et comparaison de variables géométriques :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0; 1[$.
Déterminer $P(X = Y)$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 8 – Égalité et comparaison de variables géométriques :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0; 1[$.
Déterminer $P(X = Y)$.

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P([X = n]) = P([Y = n]) = p(1 - p)^{n-1}$. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P([X = Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = n] \cap [Y = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = n])P([Y = n]) \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1 - p)^2 \right)^k = p^2 \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{p}{2 - p}. \end{aligned}$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Théorème 6 :

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrètes.

T1 ■ Si $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}([X = x]) \neq 0$ alors

X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),$
 $\mathbf{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \mathbf{P}([Y = y]).$



III. Indépendance de variables aléatoires

Théorème 6 :

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrètes.

T1 ■ Si $\forall x \in X(\Omega)$, $P([X = x]) \neq 0$ alors

X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$,
 $P_{[X=x]}([Y = y]) = P([Y = y])$.

T2 ■ Si $\forall y \in Y(\Omega)$, $P([Y = y]) \neq 0$ alors

X et Y sont indépendantes si, et seulement si $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$,
 $P_{[Y=y]}([X = x]) = P([X = x])$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

- 1 Donner la loi de X .



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

- ❶ Donner la loi de X .
- ❷ Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $P_{[X=k]}([Y = j])$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

- 1 Donner la loi de X .
- 2 Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $P_{[X=k]}([Y = j])$.
- 3 Déterminer la loi de Y .



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

- ❶ Donner la loi de X .
- ❷ Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $P_{[X=k]}([Y = j])$.
- ❸ Déterminer la loi de Y .
- ❹ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

Une urne contient trois jetons numérotés de 1 à 3. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. On lance ensuite X fois une pièce équilibrée, les lancers étant indépendants entre eux et du tirage du jeton, et on note Y le nombre de « Pile » obtenus.

- ❶ Donner la loi de X .
- ❷ Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $P_{[X=k]}([Y = j])$.
- ❸ Déterminer la loi de Y .
- ❹ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- ❺ On modifie l'expérience : après le tirage du jeton, on lance *toujours deux fois* la pièce, et on note Y' le nombre de « Pile » obtenus.
Montrer que X et Y' sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple (X, Y') .



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- 1 Donner la loi de X .
- 2 Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $\mathbf{P}_{[X=k]}([Y = j])$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- ❶ Donner la loi de $\mathbb{X}$.
- ❷ Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}(\llbracket \mathbb{Y} = j \rrbracket)$.
- ❸ Le jeton est tiré au hasard : $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $\mathbf{P}(\llbracket \mathbb{X} = k \rrbracket) = \frac{1}{3}$ (loi uniforme).



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- 1 Donner la loi de $\mathbb{X}$.
- 2 Pour $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, déterminer $\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j])$.

- 1 Le jeton est tiré au hasard : $\mathbb{X}(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, $\mathbf{P}([\mathbb{X} = k]) = \frac{1}{3}$ (loi uniforme).
- 2 Sachant $[\mathbb{X} = k]$, on lance k fois une pièce équilibrée : $\mathbb{Y}$ suit alors la loi $\mathcal{B}\left(k; \frac{1}{2}\right)$. Donc

$$\mathbf{P}_{[\mathbb{X}=k]}([\mathbb{Y} = j]) = \begin{cases} \binom{k}{j} \frac{1}{2^k} & \text{si } j \in \llbracket 0; k \rrbracket \\ 0 & \text{si } j > k. \end{cases}$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

On obtient les lois conditionnelles de Y :

j	0	1	2	3
$P_{[X=1]}([Y = j])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$P_{[X=2]}([Y = j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$P_{[X=3]}([Y = j])$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

3 Déterminer la loi de Y .

4 $Y(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$ et $(\llbracket X = k \rrbracket)_{k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements, donc pour tout $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$,

$$\mathbf{P}([Y = j]) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([X = k]) \mathbf{P}_{[X=k]}([Y = j]) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}_{[X=k]}([Y = j]).$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

3 Déterminer la loi de Y .

4 $Y(\Omega) = \llbracket 0; 3 \rrbracket$ et $([X = k])_{k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements, donc pour tout $j \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$,

$$P([Y = j]) = \sum_{k=1}^3 P([X = k]) P_{[X=k]}([Y = j]) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 P_{[X=k]}([Y = j]).$$

D'après le tableau (la somme vaut bien 1) :

$$P([Y = 0]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{24}, \quad P([Y = 1]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{24},$$

$$P([Y = 2]) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \right) = \frac{5}{24}, \quad P([Y = 3]) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{24}.$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- ④ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- ④ Pour tout $k \in X(\Omega)$, $P([X = k]) = \frac{1}{3} \neq 0$: on peut utiliser le théorème. Si X et Y étaient indépendantes, on aurait $P_{[X=k]}([Y = j]) = P([Y = j])$ pour tous k et j .

III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

④ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

④ Pour tout $k \in X(\Omega)$, $P([X = k]) = \frac{1}{3} \neq 0$: on peut utiliser le théorème. Si X et Y étaient indépendantes, on aurait $P_{[X=k]}([Y = j]) = P([Y = j])$ pour tous k et j .

Or,

$$P_{[X=1]}([Y = 2]) = 0 \neq \frac{5}{24} = P([Y = 2]).$$

III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

4 Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4 Pour tout $k \in X(\Omega)$, $P([X = k]) = \frac{1}{3} \neq 0$: on peut utiliser le théorème. Si X et Y étaient indépendantes, on aurait $P_{[X=k]}([Y = j]) = P([Y = j])$ pour tous k et j .

Or,

$$P_{[X=1]}([Y = 2]) = 0 \neq \frac{5}{24} = P([Y = 2]).$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

(Si on a tiré le jeton 1, on ne lance qu'une seule fois la pièce et on ne peut pas obtenir deux « Pile » : savoir que $X = 1$ renseigne sur Y .)



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

⑤ On lance désormais *toujours deux fois* la pièce (Y' : nombre de « Pile »).
Montrer que X et Y' sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple.

⑥ Pour tout $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, sachant $[X = k]$ on lance deux fois la pièce :

$Y' \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, donc $\mathbf{P}_{[X=k]}([Y' = j]) = \binom{2}{j} \frac{1}{4}$ pour tout $j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$.



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- ⑤ On lance désormais *toujours deux fois* la pièce (Y' : nombre de « Pile »).
Montrer que X et Y' sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple.

- ⑥ Pour tout $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, sachant $[X = k]$ on lance deux fois la pièce :

$Y' \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right)$, donc $\mathbf{P}_{[X=k]}([Y' = j]) = \binom{2}{j} \frac{1}{4}$ pour tout $j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$.

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}([Y' = j]) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([X = k]) \binom{2}{j} \frac{1}{4} = \binom{2}{j} \frac{1}{4} = \mathbf{P}_{[X=k]}([Y' = j]).$$



III. Indépendance de variables aléatoires

Exercice 9 – Nombre aléatoire de lancers :

- ⑤ On lance désormais *toujours deux fois* la pièce (Y' : nombre de « Pile »).
Montrer que X et Y' sont indépendantes, sans déterminer la loi du couple.

- ⑥ Pour tout $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, sachant $[X = k]$ on lance deux fois la pièce :

$$Y' \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(2; \frac{1}{2}\right), \text{ donc } \mathbf{P}_{[X=k]}([Y' = j]) = \binom{2}{j} \frac{1}{4} \text{ pour tout } j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}([Y' = j]) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{P}([X = k]) \binom{2}{j} \frac{1}{4} = \binom{2}{j} \frac{1}{4} = \mathbf{P}_{[X=k]}([Y' = j]).$$

Comme $\mathbf{P}([X = k]) \neq 0$ pour tout k , le **théorème (6)** permet de conclure que X et Y' sont indépendantes.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

- 1 Couple de variables aléatoires discrètes
- 2 Lois conditionnelles
- 3 Indépendance de variables aléatoires
- 4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes**
 - Loi d'une somme
 - Loi d'un produit
 - Loi d'un maximum et d'un minimum
- 5 Bilan et compétences attendues



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Proposition 7 – Loi d'une somme de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- $X + Y$ est une variable aléatoire réelle discrète.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Proposition 7 – Loi d'une somme de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La loi de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est fournie par,

$$\begin{aligned}\forall z \in (\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega), \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z]) &= \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ z-x \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = z - x]) \\ &= \sum_{\substack{z-y \in \mathbb{X}(\Omega) \\ y \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = z - y] \cap [\mathbb{Y} = y]).\end{aligned}$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Proposition 7 – Loi d'une somme de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La loi de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est fournie par,

$$\begin{aligned}\forall z \in (\mathbb{X} + \mathbb{Y})(\Omega), \mathbf{P}([\mathbb{X} + \mathbb{Y} = z]) &= \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ z-x \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = z - x]) \\ &= \sum_{\substack{z-y \in \mathbb{X}(\Omega) \\ y \in \mathbb{Y}(\Omega)}} \mathbf{P}([\mathbb{X} = z - y] \cap [\mathbb{Y} = y]).\end{aligned}$$

On dit que la loi de $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est le produit de convolution (discret) des lois de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Corollaire 1 :

Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y} = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k) \mathbf{P}(\mathbb{Y} = n - k).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exemple 9 :

On considère deux variable aléatoire X et Y telles que $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$ (ex. lancers d'un dé à 6 et d'un dé à 4 faces).
Déterminons la loi de $X + Y$.

■ $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2; 10 \rrbracket$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exemple 9 :

On considère deux variable aléatoire X et Y telles que $X \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 6 \rrbracket)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 4 \rrbracket)$ (ex. lancers d'un dé à 6 et d'un dé à 4 faces).
Déterminons la loi de $X + Y$.

- $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2; 10 \rrbracket$.
- Par indépendance, pour $k \in \llbracket 2; 10 \rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X + Y = k) &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket}} \mathbf{P}(X = i) \mathbf{P}(Y = k - i) \\ &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket}} \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \\ k-i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket}} 1 \\ &= \frac{1}{24} \times \text{card}(\{(i, j) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \times \llbracket 1; 4 \rrbracket \mid i + j = k\}).\end{aligned}$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exemple 9 :

On obtient la loi de $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb couples	1	2	3	4	4	4	3	2	1
$\mathbf{P}(\mathbb{X} + \mathbb{Y} = k)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Théorème 8 – Stabilité des lois binomiales et de Poisson :

T1 ■ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Alors,

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m; p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n + m; p).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Théorème 8 – Stabilité des lois binomiales et de Poisson :

T1 ■ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.

Alors,

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n; p) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(m; p) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n + m; p).$$

T2 ■ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$.

Alors

$$\left. \begin{array}{l} X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu) \\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Théorème 9 – Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson :

T1 ■ Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.
Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^n n_k; p\right).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Théorème 9 – Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson :

T1 ■ Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.
Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^n n_k; p\right).$$

T2 ■ Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}^{+*}$.
Alors

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_k) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de variables} \\ \text{aléatoires indépendantes} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \sum_{k=1}^n X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Méthode 6 :

Pour déterminer la loi de $X \pm Y$ ou $|X - Y|$, on utilise la formule des probabilités totales (avec $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :

M1 ■ soit on connaît la loi jointe,



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Méthode 6 :

Pour déterminer la loi de $X \pm Y$ ou $|X - Y|$, on utilise la formule des probabilités totales (avec $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :

- M1** ▪ soit on connaît la loi jointe,
- M2** ▪ soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Méthode 6 :

Pour déterminer la loi de $X \pm Y$ ou $|X - Y|$, on utilise la formule des probabilités totales (avec $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :

- M1** ▪ soit on connaît la loi jointe,
- M2** ▪ soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,
- M3** ▪ soit X et Y sont indépendantes et on connaît leur loi.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 10 – Somme de deux variables géométriques indépendantes :

Soient $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables indépendantes ($p \in]0, 1[$).
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 10 – Somme de deux variables géométriques indépendantes :

Soient $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables indépendantes ($p \in]0, 1[$).
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

$Z(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour $n \geq 2$, par le produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{n-k-1}) \\ &= p^2(n-1)(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 10 – Somme de deux variables géométriques indépendantes :

Soient $X, Y \sim \mathcal{G}(p)$ deux variables indépendantes ($p \in]0, 1[$).
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

$\mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Pour $n \geq 2$, par le produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} (p(1-p)^{k-1})(p(1-p)^{n-k-1}) \\ &= p^2(n-1)(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$

Z suit une loi binomiale négative (rang du second succès).



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 11 – Stabilité de la loi de Poisson et loi conditionnelle :

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables indépendantes. Soit $Z = X + Y$.

④ Donner la loi de Z .



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 11 – Stabilité de la loi de Poisson et loi conditionnelle :

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables indépendantes. Soit $Z = X + Y$.

- ❶ Donner la loi de Z .
- ❷ Sachant $[Z = n]$, déterminer la loi conditionnelle de X .
- ❸ Par stabilité et indépendance, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une somme

Exercice 11 – Stabilité de la loi de Poisson et loi conditionnelle :

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux variables indépendantes. Soit $Z = X + Y$.

- ❶ Donner la loi de Z .
- ❷ Sachant $[Z = n]$, déterminer la loi conditionnelle de X .

- ❶ Par stabilité et indépendance, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
- ❷ Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on cherche $\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k)$:

$$\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k) = \frac{\mathbf{P}([X = k] \cap [X + Y = n])}{\mathbf{P}(Z = n)} = \frac{\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = n - k])}{\mathbf{P}(Z = n)}$$

Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}_{[Z=n]}(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^{n-k}$$

Conclusion : Sachant $[Z = n]$, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Proposition 10 – Loi d'un produit de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- XY est une variable aléatoire réelle discrète.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Proposition 10 – Loi d'un produit de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- XY est une variable aléatoire réelle discrète.
- La loi de XY est fournie par, $\forall z \in (XY)(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [xY = z])$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Proposition 10 – Loi d'un produit de variables aléatoires :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes.

Alors,

- XY est une variable aléatoire réelle discrète.
- La loi de XY est fournie par, $\forall z \in (XY)(\Omega)$,

$$\mathbf{P}([XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [XY = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}([X = x] \cap [xY = z])$$

ou

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([XY = z] \cap [Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}([yX = z] \cap [Y = y]).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Exercice 12 – Produit de variables de Bernoulli :

Soient $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$ deux variables indépendantes ($p, q \in]0, 1[$).
Déterminer la loi de $Z = XY$ et tester l'indépendance de X et Z .



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Exercice 12 – Produit de variables de Bernoulli :

Soient $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$ deux variables indépendantes ($p, q \in]0, 1[$). Déterminer la loi de $Z = XY$ et tester l'indépendance de X et Z .

- Comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $XY(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([XY = 1]) &= \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 1]) \quad \text{par indépendance} \\ &= pq.\end{aligned}$$

Ainsi, $XY \rightsquigarrow \mathcal{B}(pq)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

2. Loi d'un produit

Exercice 12 – Produit de variables de Bernoulli :

Soient $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$ deux variables indépendantes ($p, q \in]0, 1[$). Déterminer la loi de $Z = XY$ et tester l'indépendance de X et Z .

- Comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ alors $XY(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([XY = 1]) &= \mathbf{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ &= \mathbf{P}([X = 1]) \times \mathbf{P}([Y = 1]) \quad \text{par indépendance} \\ &= pq.\end{aligned}$$

Ainsi, $XY \rightsquigarrow \mathcal{B}(pq)$.

- De plus, $\mathbf{P}([X = 0] \cap [Z = 1]) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Z = 1) = (1 - p)pq$, donc X et Z ne sont pas indépendantes.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 11 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 11 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

T1 ■

- $V = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 11 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probablisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

T1 ■

- $V = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_V(t) = F_X(t)F_Y(t).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 11 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probablisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

T1

- $V = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_V(t) = F_X(t)F_Y(t).$$

T2

- $U = \min(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Théorème 11 :

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces variables aléatoires réelles ainsi que $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

T1

- $V = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_V(t) = F_X(t)F_Y(t).$$

T2

- $U = \min(X, Y)$ est une variable aléatoire réelle discrète.
- La fonction de répartition de $U = \min(X, Y)$ vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_U(t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Remarque : Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que

$$X + Y = \min(X, Y) + \max(X, Y).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Remarque : Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que

$$X + Y = \min(X, Y) + \max(X, Y).$$

Méthode 7 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$, et de même pour $P(Y > n)$;



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Remarque : Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que

$$X + Y = \min(X, Y) + \max(X, Y).$$

Méthode 7 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$, et de même pour $P(Y > n)$;
- ❷ montrer que $P(\min(X, Y) > n) = P(X > n) \times P(Y > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Remarque : Une fois connu le maximum de 2 variables aléatoires réelles , on peut en déduire le minimum en utilisant le fait que

$$X + Y = \min(X, Y) + \max(X, Y).$$

Méthode 7 – Loi d'un minimum :

Pour déterminer la loi de $\min(X, Y)$ dans le cas où X et Y sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k)$, et de même pour $P(Y > n)$;
- ❷ montrer que $P(\min(X, Y) > n) = P(X > n) \times P(Y > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- ❸ conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\min(X, Y) = n) = P(\min(X, Y) > n - 1) - P(\min(X, Y) > n).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 13 – Minimum de variables géométriques :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0; 1[$.

Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 13 – Minimum de variables géométriques :

❶ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{P}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \sum_{k=1}^n q_1^{k-1} p_1 = q_1^n \text{ (avec } q_1 = 1 - p_1 \text{)}.$$

De même, $\mathbf{P}([Y > n]) = q_2^n$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 13 – Minimum de variables géométriques :

- ❶ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{P}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \sum_{k=1}^n q_1^{k-1} p_1 = q_1^n \text{ (avec } q_1 = 1 - p_1 \text{)}.$$

De même, $\mathbf{P}([Y > n]) = q_2^n$.

- ❷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}([U > n]) = \mathbf{P}([X > n] \cap [Y > n]) = \mathbf{P}([X > n])\mathbf{P}([Y > n]) = (q_1 q_2)^n.$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 13 – Minimum de variables géométriques :

- ❶ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{P}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \sum_{k=1}^n q_1^{k-1} p_1 = q_1^n \text{ (avec } q_1 = 1 - p_1 \text{)}.$$

De même, $\mathbf{P}([Y > n]) = q_2^n$.

- ❷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}([U > n]) = \mathbf{P}([X > n] \cap [Y > n]) = \mathbf{P}([X > n])\mathbf{P}([Y > n]) = (q_1 q_2)^n.$$

- ❸ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{P}([U = n]) = \mathbf{P}([U > n-1]) - \mathbf{P}([U > n]) = (q_1 q_2)^{n-1} (1 - q_1 q_2).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 13 – Minimum de variables géométriques :

- ❶ Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{P}([X > n]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq n]) = 1 - \sum_{k=1}^n q_1^{k-1} p_1 = q_1^n \text{ (avec } q_1 = 1 - p_1).$$

De même, $\mathbf{P}([Y > n]) = q_2^n$.

- ❷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}([U > n]) = \mathbf{P}([X > n] \cap [Y > n]) = \mathbf{P}([X > n])\mathbf{P}([Y > n]) = (q_1 q_2)^n.$$

- ❸ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbf{P}([U = n]) = \mathbf{P}([U > n-1]) - \mathbf{P}([U > n]) = (q_1 q_2)^{n-1} (1 - q_1 q_2).$$

Comme $q_1 q_2 \in]0; 1[$, on en déduit : $U \rightsquigarrow \mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Méthode 8 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n)$;



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Méthode 8 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n)$;
- ❷ montrer que $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Méthode 8 – Loi d'un maximum :

Pour déterminer la loi de $\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ dans le cas où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont **indépendantes** à valeurs dans $\mathbb{N}$, il faudra donc :

- ❶ calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(\mathbb{X} = k)$, et de même pour $\mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n)$;
- ❷ montrer que $\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq n) = \mathbf{P}(\mathbb{X} \leq n) \times \mathbf{P}(\mathbb{Y} \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- ❸ conclure en utilisant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = n) = \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq n) - \mathbf{P}(\max(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \leq n - 1).$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 14 – Loi d'un maximum :

On reprend les notations de l' exercice (13) et on pose $V = \max(X, Y)$.
Déterminer la loi de V .



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 14 – Loi d'un maximum :

❶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}([Y \leq n]) = \mathbf{P}([X \leq n] \cap [Y \leq n]) = (1 - q_1^n)(1 - q_2^n) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n.$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 14 – Loi d'un maximum :

- ❶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{P}([\mathbb{V} \leq n]) = \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq n] \cap [\mathbb{Y} \leq n]) = (1 - q_1^n)(1 - q_2^n) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n.$$

- ❷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([\mathbb{V} = n]) &= \mathbf{P}([\mathbb{V} \leq n]) - \mathbf{P}([\mathbb{V} \leq n-1]) \\ &= q_1^{n-1}(1 - q_1) + q_2^{n-1}(1 - q_2) - (q_1 q_2)^{n-1}(1 - q_1 q_2).\end{aligned}$$



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 15 – Maximum de variables uniformes discrètes :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 1$).

On pose $V = \max(X, Y)$.

❗ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(V \leq k)$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 15 – Maximum de variables uniformes discrètes :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 1$).

On pose $V = \max(X, Y)$.

❶ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(V \leq k)$.

❷ $[\max(X, Y) \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$. Par indépendance : $P(V \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 15 – Maximum de variables uniformes discrètes :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 1$).

On pose $V = \max(X, Y)$.

- ❶ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(V \leq k)$.
- ❷ En déduire la loi de V , c'est-à-dire $P(V = k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

❶ $[\max(X, Y) \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$. Par indépendance : $P(V \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$.



IV. Opérations sur les variables aléatoires discrètes

3. Loi d'un maximum et d'un minimum

Exercice 15 – Maximum de variables uniformes discrètes :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \geq 1$).

On pose $V = \max(X, Y)$.

- ❶ Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $P(V \leq k)$.
- ❷ En déduire la loi de V , c'est-à-dire $P(V = k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

❶ $[\max(X, Y) \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$. Par indépendance : $P(V \leq k) = \frac{k^2}{n^2}$.

❷ Pour $k = 1$, $P(V = 1) = \frac{1}{n^2}$. Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(V = k) = \frac{2k - 1}{n^2}$.



V. Bilan et compétences attendues

- 1 Couple de variables aléatoires discrètes
- 2 Lois conditionnelles
- 3 Indépendance de variables aléatoires
- 4 Opérations sur les variables aléatoires discrètes
- 5 Bilan et compétences attendues**



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple ou une loi conditionnelle.



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple ou une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement).



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple ou une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement).
- savoir démontrer que deux variables aléatoires réelles X et Y sont non indépendantes en exhibant un couple (x, y) qui met en défaut l'indépendance.



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple ou une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement).
- savoir démontrer que deux variables aléatoires réelles X et Y sont non indépendantes en exhibant un couple (x, y) qui met en défaut l'indépendance.
- savoir déterminer la loi d'une v.a.r. $Z = g(X, Y)$ dans les cas particuliers classiques $(X + Y, X - Y, |X - Y|, XY)$.



V. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer la loi d'un couple (et rédaction associée).
- savoir déterminer une loi marginale connaissant la loi du couple ou une loi conditionnelle.
- savoir passer de la loi du couple à la loi conditionnelle (et inversement).
- savoir démontrer que deux variables aléatoires réelles X et Y sont non indépendantes en exhibant un couple (x, y) qui met en défaut l'indépendance.
- savoir déterminer la loi d'une v.a.r. $Z = g(X, Y)$ dans les cas particuliers classiques $(X + Y, X - Y, |X - Y|, XY)$.
- savoir déterminer la loi du max ou du min de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.

