

Espérance, Variance & Co

Plan du chapitre

I CALCULS D'ESPÉRANCES	1
I.1 CAS GÉNÉRAL : ESPÉRANCE DE $Z = g(X, Y)$	1
I.2 ESPÉRANCE D'UNE SOMME	5
I.3 ESPÉRANCE D'UN PRODUIT	5
II COVARIANCE D'UN COUPLE	8
II.1 VARIANCE D'UNE SOMME	9
II.2 COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE	11
III BILAN ET COMPÉTENCES ATTENDUES	13

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

I. CALCULS D'ESPÉRANCES

I.1 – Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 1 – Théorème de transfert :

Soit g une fonction définie sur $\mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une *espérance* si, et seulement si la série double

$$\sum_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

À retenir

Sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ y \in \mathcal{Y}(\Omega)}} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$ est la somme de cette série :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) &= \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \left(\sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \left(\sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \right).\end{aligned}$$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

1. Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont finies :

Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.

La variable aléatoire $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet alors une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]).$$

2. Si $\mathbb{X}$ est finie et $\mathbb{Y}$ infinie :

Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Si pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j])$ est absolument convergente alors $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]).$$

Le cas $\mathbb{X}$ infinie et $\mathbb{Y}$ finie est similaire :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ et } \mathbb{Y}(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la série $\sum_{i \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j])$ est absolument convergente alors $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^n g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]).$$

3. Si $\mathbb{X}$ est infinie et $\mathbb{Y}$ infinie :

Dans ce cas, $\mathbb{X}(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{Y}(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Il faut alors démontrer :

- $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j])$ est absolument convergente.
- la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]) \right)$ est absolument convergente.

Alors $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x_i] \cap [\mathbb{Y} = y_j]).$$

Exemple 1 – Espérance d'un maximum :

On reprend les notations d'un exemple du chapitre précédent où :

- $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ avec $p_1, p_2 \in]0; 1[$ et $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$,
- $\mathbb{V} = \max(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$,
- avec $\mathbf{P}([\mathbb{V} \leq n]) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n$.

Montrons que $\mathbb{V}$ admet une espérance et déterminons-la.

Exemple 2 :

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est définie par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{e 2^{j+k} j! k!}.$$

Justifions que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.

💡 Idée

X et Y ont des rôles symétriques dans la loi jointe donc les deux lois marginales sont identiques.

I.2 – Espérance d'une somme

Proposition 2 – Linéarité de l'espérance :

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Si les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda_1 \mathbb{X}_1 + \lambda_2 \mathbb{X}_2 + \dots + \lambda_n \mathbb{X}_n$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{X}_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{E}(\mathbb{X}_k).$$

En particulier, lorsque pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 1$, on obtient :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{X}_k \right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}_k).$$

Proposition 3 – Croissance de l'espérance :

$$\boxed{\text{P1}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, \mathbb{X}(\omega) \geq 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} \geq 0]) = 1 \\ \mathbb{X} \text{ admet une espérance} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbb{X}) \geq 0.$$

$$\boxed{\text{P2}} \cdot \left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, \mathbb{X}(\omega) \leq \mathbb{Y}(\omega) \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}]) = 1 \\ \mathbb{X} \text{ et } \mathbb{Y} \text{ admettent une espérance} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbb{X}) \leq \mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

I.3 – Espérance d'un produit

Théorème 4 – Cas général :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

— $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance.

— Et :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) &= \sum_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} xy \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]). \end{aligned}$$

Exemple 3 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

- $\mathbb{X}$ le minimum des deux nombres obtenus,
- $\mathbb{Y}$ le maximum des deux nombres obtenus.

Déterminons $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y})$.

Exercice 1 – (Calcul d'espérance par transfert)

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = i] \cap [\mathbb{Y} = j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

1. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(\mathbb{Z})$ de la variable $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

⚠ Attention

La réciproque est fausse!
confer le contre-
exemple (6)

🏛 Rappel

Si $\mathbb{X}$ admet une espérance,
alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,
 $a\mathbb{X} + b$ admet une espérance
et $\mathbf{E}(a\mathbb{X} + b) = a\mathbf{E}(\mathbb{X}) + b$.

Proposition 5 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes :

- P1** • Si $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors la variable aléatoire $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = \mathbf{E}(\mathbb{X})\mathbf{E}(\mathbb{Y}).$$

- P2** • Si $(\mathbb{X}_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}_k).$$

Exemple 4 :

Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.

Exemple 5 :

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$.

Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

Contre-exemple 6 – $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais X et Y non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

On note X l'abscisse du point et Y son ordonnée.

II. COVARIANCE D'UN COUPLE**Définition 1 – Covariance :**

La covariance du couple (X, Y) est le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par (si existence) :

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

À retenir

$$\text{Cov}(X, X) = V(X).$$

Théorème 6 – Condition suffisante d'existence de la covariance :

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y)$ existe.

En pratique, on utilisera assez peu la **définition (1)**, mais plutôt la formule qui suit :

Proposition 7 – Formule de Koenig-Huygens :

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 • $\text{Cov}(X, X) = V(X).$

P2 • $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)

P3 • $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$ (linéarité à gauche)

P4 • $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$ (linéarité à droite)

P5 • $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0.$

P6 • Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0.$

⚠ Attention

La réciproque de **P6** est fautive mais la contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

II.1 – Variance d'une somme**Proposition 9 – Variance d'une somme :**

P1 • Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

P2 • Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

P3 • Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

Remarque : On retiendra en particulier que :

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) - \mathbf{V}(\mathbb{X}) - \mathbf{V}(\mathbb{Y}) \right),$$

qui permet de calculer la covariance à partir des variances.

Exemple 7 :

Dans l'exemple du jet de deux dés à 3 faces, déterminons $\mathbf{V}(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ avec $\mathbb{X} = \min(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Y} = \max(\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2)$ où $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3])$ et sont indépendantes.

On peut calculer facilement la variance d'une $\mathcal{B}(n, p)$ à partir de la **proposition (9)**.

En effet, une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p :

Corollaire 10 – Variance d'une loi binomiale :

Soit $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$\mathbf{V}(\mathbb{X}) = np(1 - p).$$

Théorème 11 – Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors :

$$(\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))^2 \leq \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}).$$

i Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$$|\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})| \leq \sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y}).$$

Remarque importante : Dans le cas d'égalité *i.e.* $((\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))^2 = \mathbf{V}(\mathbb{X})\mathbf{V}(\mathbb{Y}))$, la fonction $t \mapsto \mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y})$ admet alors une unique racine $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{V}(\alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = 0$ *i.e.* la variable aléatoire $\alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ est presque sûrement constante.

On reviendra sur ce point à la **proposition (12)**.

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

II.2 – Coefficient de corrélation linéaire

Définition 2 – Coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires d'écarts-types non nuls. Le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types respectifs de X et Y .

Rappel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

Proposition 12 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires de variance non nulle.

P1 • $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

P2 • (1) $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictly croissante de l'autre.

(2) $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
Exemple : X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, Y = production de comté.
- Le signe de $\rho(X, Y)$ (et de $\text{Cov}(X, Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :
 - Si $\rho(X, Y) > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.
Exemple : X = température extérieure, Y = consommation de crèmes glacées.
 - Si $\rho(X, Y) < 0$, les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.
Exemple : X = température extérieure, Y = facture de chauffage.

Vocabulaire : Si $\rho(X, Y) = 0$ i.e. $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont non corrélés.

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

Attention

indépendantes $\Rightarrow$ non corrélées mais la réciproque est fausse ! *confer* le contre-exemple (9) .

Contre-exemple 9 – Suite de l'exemple (5) :

On a trouvé :

— $\mathbf{E}(\mathbb{X}\mathbb{Y}) = 0$ et $\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{E}(\mathbb{Y}) = 0$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors $\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$.

— les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ ne sont pas indépendantes.

Les variables aléatoires $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont non corrélées, mais ne sont pas indépendantes !

Dernière remarque : Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine α de

$$\mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = t^2\mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

Rappel

Dans le cas où « $\Delta = 0$ », l'unique racine α de

$$at^2 + bt + c$$

est

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\cancel{\mathbb{X}} \text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\cancel{\mathbb{V}}(\mathbb{X})} = -\frac{\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})} \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\mathbb{V}(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma^2(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\end{aligned}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement}$$

et

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = -1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = -\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement.}$$

Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont liées par une relation affine.

Attention

Attention encore une fois de ne pas confondre « indépendance linéaire » et « indépendance » : si $\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$ (ou $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 0$), alors $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont linéairement indépendantes.

Mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $\mathbb{Y} = e^{\mathbb{X}}$, $\ln(\mathbb{X})$, ...

Un peu d'histoire : Corrélation vs Indépendance

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues. Formellement, l'indépendance entre deux variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des événements des variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes (c'est-à-dire elles ne sont pas indépendantes).

Ce résultat laisse alors la possibilité aux situations où des variables seraient dépendantes sans être corrélées.

III. BILAN ET COMPÉTENCES ATTENDUES

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\text{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur **Cov**.
- savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).
- savoir calculer un coefficient de corrélation linéaire et savoir commenter sa valeur (proximité de 1, -1 et signe).

- savoir démontrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes via le calcul de l'espérance du produit / de la covariance / du coefficient de corrélation linéaire (3 formulations différentes de la même propriété).