

Espérance, Variance & Co

Cours de ECG-2

Lycée Gerville Réache

Chapitre 6



- 1 **Calculs d'espérances**
- 2 **Covariance d'un couple**
- 3 **Bilan et compétences attendues**



Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.



I. Calculs d'espérances

1 Calculs d'espérances

- Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$
- Espérance d'une somme
- Espérance d'un produit

2 Covariance d'un couple

3 Bilan et compétences attendues



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

À retenir

Sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ y \in \mathcal{Y}(\Omega)}} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 1 – Théorème de transfert :

Soit g une fonction définie sur $\mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une **espérance** si, et seulement si la série double

$$\sum_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbf{E}(g(X, Y))$ est la somme de cette série :



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$



À retenir

Sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{X}(\Omega) \\ y \in \mathcal{Y}(\Omega)}} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 1 – Théorème de transfert :

Soit g une fonction définie sur $\mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une **espérance** si, et seulement si la série double

$$\sum_{(x,y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbf{E}(g(X, Y))$ est la somme de cette série :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \left(\sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right)$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$



À retenir

Sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) = \sum_{\substack{x \in \mathbb{X}(\Omega) \\ y \in \mathbb{Y}(\Omega)}} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]).$$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 1 – Théorème de transfert :

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)$.

La variable aléatoire $g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ admet une **espérance** si, et seulement si la série double

$$\sum_{(x,y) \in \mathbb{X}(\Omega) \times \mathbb{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y])$$

est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y}))$ est la somme de cette série :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(\mathbb{X}, \mathbb{Y})) &= \sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} \left(\sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \right) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Y}(\Omega)} \left(\sum_{x \in \mathbb{X}(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}([\mathbb{X} = x] \cap [\mathbb{Y} = y]) \right). \end{aligned}$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

❶ Si X et Y sont finies :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.

La variable aléatoire $g(X, Y)$ admet alors une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

② Si X est finie et Y infinie :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Si pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente alors $g(X, Y)$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

② Si X est finie et Y infinie :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Si pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente alors $g(X, Y)$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

Le cas X infinie et Y finie est similaire :

$$X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Si pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la série $\sum_{i \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente alors $g(X, Y)$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^n g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

④ Si X est infinie et Y infinie :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Il faut alors démontrer :

- ① $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente.



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

③ Si X est infinie et Y infinie :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Il faut alors démontrer :

① $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente.

② la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \right)$ est absolument convergente.



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

③ Si X est infinie et Y infinie :

Dans ce cas, $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

Il faut alors démontrer :

① $\forall i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ est absolument convergente.

② la série $\sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \right)$ est absolument convergente.

Alors $g(X, Y)$ admet une espérance donnée par :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i, y_j) \mathbf{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Exemple 1 – Espérance d'un maximum :

On reprend les notations d'un exemple du chapitre précédent où :

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ avec $p_1, p_2 \in]0; 1[$ et $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$,
- $V = \max(X, Y)$,
- avec $\mathbf{P}(V \leq n) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n$.

Montrons que V admet une espérance et déterminons-la.

I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

Exemple 1 – Espérance d'un maximum :

On reprend les notations d'un exemple du chapitre précédent où :

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ avec $p_1, p_2 \in]0; 1[$ et $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$,
- $V = \max(X, Y)$,
- avec $\mathbf{P}([V \leq n]) = 1 - q_1^n - q_2^n + (q_1 q_2)^n$.

Montrons que V admet une espérance et déterminons-la.

$$\mathbf{E}(V) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

§ 1.1.1

X et Y ont des rôles symétriques dans la loi jointe donc les deux lois marginales sont identiques.

Exemple 2 :

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est définie par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{e2^{j+k} j! k!}.$$

Justifions que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.



I. Calculs d'espérances

1. Cas général : espérance de $Z = g(X, Y)$

X et Y ont des rôles symétriques dans la loi jointe donc les deux lois marginales sont identiques.

Exemple 2 :

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est définie par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{e2^{j+k}j!k!}.$$

Justifions que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.

$$\mathbf{E}(2^{X+Y}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k} \mathbf{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{j}{j!} + \frac{1}{j!} \right) = 2e.$$



I. Calculs d'espérances

2. Espérance d'une somme

Proposition 2 – Linéarité de l'espérance :

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Si les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda_1 \mathbb{X}_1 + \lambda_2 \mathbb{X}_2 + \dots + \lambda_n \mathbb{X}_n$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{X}_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{E} (\mathbb{X}_k) .$$



I. Calculs d'espérances

2. Espérance d'une somme

Proposition 2 – Linéarité de l'espérance :

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Si les variables aléatoires $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_n$ admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda_1 \mathbb{X}_1 + \lambda_2 \mathbb{X}_2 + \dots + \lambda_n \mathbb{X}_n$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{X}_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{E} (\mathbb{X}_k).$$

En particulier, lorsque pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k = 1$, on obtient :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{X}_k \right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E} (\mathbb{X}_k).$$



I. Calculs d'espérances

2. Espérance d'une somme

Proposition 3 – Croissance de l'espérance :

P1

$$\left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0 \text{ ou } \mathbf{P}(X \geq 0) = 1 \\ X \text{ admet une espérance} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0.$$



I. Calculs d'espérances

2. Espérance d'une somme

Proposition 3 – Croissance de l'espérance :

$$\boxed{\text{P1}} \quad \left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0 \text{ ou } \mathbf{P}([X \geq 0]) = 1 \\ X \text{ admet une espérance} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}(X) \geq 0.$$

$$\boxed{\text{P2}} \quad \left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ ou } \mathbf{P}([X \leq Y]) = 1 \\ X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y).$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Théorème 4 – Cas général :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

- XY admet une espérance.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Théorème 4 – Cas général :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

- XY admet une espérance.

- Et :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{(x;y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Théorème 4 – Cas général :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

■ XY admet une espérance.

■ Et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{(x;y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y])\end{aligned}$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Théorème 4 – Cas général :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2.

Alors :

■ XY admet une espérance.

■ Et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{(x;y) \in \mathcal{X}(\Omega) \times \mathcal{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} \sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}(\Omega)} \sum_{x \in \mathcal{X}(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]).\end{aligned}$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 3 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

- X le minimum des deux nombres obtenus,
- Y le maximum des deux nombres obtenus.

Déterminons $E(XY)$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 3 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

- X le minimum des deux nombres obtenus,
- Y le maximum des deux nombres obtenus.

Déterminons $E(XY)$.

La loi conjointe de (X, Y) est résumée ci-dessous ($X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$) :

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 3 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

- X le minimum des deux nombres obtenus,
- Y le maximum des deux nombres obtenus.

Déterminons $E(XY)$.

La loi conjointe de (X, Y) est résumée ci-dessous ($X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket$) :

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 3 :

On considère le jet de deux dés à 3 faces et on note :

- X le minimum des deux nombres obtenus,
- Y le maximum des deux nombres obtenus.

Déterminons $E(XY)$.

X et Y étant à support fini, elles admettent un moment d'ordre 2. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbf{P}([X = x] \cap [Y = y]) \\ &= \frac{1}{9}(1 \cdot 1) + \frac{2}{9}(1 \cdot 2) + \frac{2}{9}(1 \cdot 3) + \frac{1}{9}(2 \cdot 2) + \frac{2}{9}(2 \cdot 3) + \frac{1}{9}(3 \cdot 3) \\ &= \frac{1 + 4 + 6 + 4 + 12 + 9}{9} = \frac{36}{9} = 4. \end{aligned}$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exercice 1 – Calcul d'espérance par transfert :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

- ❶ Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exercice 1 – Calcul d'espérance par transfert :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

❶ Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

❷ On calcule la somme double des probabilités :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{4ij}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right)$$

Comme $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exercice 1 – Calcul d'espérance par transfert :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

- ② En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(Z)$ de la variable $Z = XY$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exercice 1 – Calcul d'espérance par transfert :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

- ❶ En utilisant le théorème de transfert, calculer l'espérance $\mathbf{E}(Z)$ de la variable $Z = XY$.

- ❷ Par le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (ij) \cdot \mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right)$$

$$\text{Comme } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} :$$

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit



La réciproque est fausse ! *confer* le contre-exemple (6)

Proposition 5 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes :

P1 ■ Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Rappel

Si X admet une espérance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Proposition 5 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes :

P1 ■ Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

P2 ■ Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et

$$E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k).$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 4 :

Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 4 :

Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.

■ Puisque $\mathbb{X}(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = -1 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = 2p - 1.$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

 Remarque

Comme $\mathbb{Y}_n(\Omega) = \{-1; 1\}$ est fini, l'existence de l'espérance était immédiate.

Exemple 4 :

Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.

- Puisque $\mathbb{X}(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire $\mathbb{X}$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = -1 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = 2p - 1.$$

- Les variables $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ admettent une espérance et sont indépendantes, donc $\mathbb{Y}_n$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}(\mathbb{Y}_n) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(\mathbb{X}_k) = (2p - 1)^n.$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 4 :

Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire $\mathbb{X}$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = 1]) = p, \quad \mathbf{P}([\mathbb{X} = -1]) = 1 - p.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que $\mathbb{X}$ et on pose $\mathbb{Y}_n = \prod_{k=1}^n \mathbb{X}_k$.

Déterminons l'espérance de $\mathbb{Y}_n$ puis déduisons-en la loi de $\mathbb{Y}_n$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{X}_k(\Omega) = \{-1; 1\}$ d'où $\mathbb{Y}_n(\Omega) = \{-1; 1\}$ et en résolvant le système associé :

$$\mathbf{P}([\mathbb{Y}_n = 1]) = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathbb{Y}_n = -1]) = \frac{1 - (2p - 1)^n}{2}.$$



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 5 :

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$.

Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Exemple 5 :

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$.

Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

- Par indépendance de X_1 et X_2 : $E(Y) = E(X_1)E(X_2) = p^2$.
De même, $E(Z) = p^2$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

À retenir

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \Rightarrow X^2 = X.$$

Exemple 5 :

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$.

Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

- Par indépendance de X_1 et X_2 : $E(Y) = E(X_1)E(X_2) = p^2$.
De même, $E(Z) = p^2$.
- On a $YZ = X_1 X_2^2 X_3$. Comme $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on a $X_2^2 = X_2$.
D'où $YZ = X_1 X_2 X_3$. Par indépendance de X_1, X_2, X_3 :

$$E(YZ) = E(X_1)E(X_2)E(X_3) = p^3.$$

Comme $p \in]0; 1[$, $p^3 \neq p^4 = E(Y)E(Z)$, Y et Z ne sont pas indépendantes.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Contre-Exemple 6 – $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais X et Y non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

On note X l'abscisse du point et Y son ordonnée.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Contre-Exemple 6 – $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ mais X et Y non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

On note X l'abscisse du point et Y son ordonnée.

■ Par équiprobabilité, $\mathbf{P}([X = -1]) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}$, d'où

$\mathbf{E}(X) = 0$.

De même $\mathbf{E}(Y) = 0$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Contre-Exemple 6 – $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ mais X et Y non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

On note X l'abscisse du point et Y son ordonnée.

- Par équiprobabilité, $\mathbf{P}([X = -1]) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{P}([X = 0]) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}$, d'où $\mathbf{E}(X) = 0$.

De même $\mathbf{E}(Y) = 0$.

- Pour tout point possible, le produit de l'abscisse et de l'ordonnée est nul, donc $XY = 0$ presque sûrement et $\mathbf{E}(XY) = 0$.



I. Calculs d'espérances

3. Espérance d'un produit

Contre-Exemple 6 – $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais X et Y non indépendantes :

On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

On note X l'abscisse du point et Y son ordonnée.

- Par équiprobabilité, $P([X = -1]) = \frac{1}{4}$, $P([X = 0]) = \frac{1}{2}$, $P([X = 1]) = \frac{1}{4}$, d'où $E(X) = 0$.
De même $E(Y) = 0$.
- Pour tout point possible, le produit de l'abscisse et de l'ordonnée est nul, donc $XY = 0$ presque sûrement et $E(XY) = 0$.
- Cependant, $P([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0 \neq P([X = 0])P([Y = 0]) = \frac{1}{4}$.
Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes, bien que $E(XY) = E(X)E(Y)$.



II. Covariance d'un couple

1 Calculs d'espérances

2 **Covariance d'un couple**

- Variance d'une somme
- Coefficient de corrélation linéaire

3 Bilan et compétences attendues



$$\text{Cov}(X, X) = V(X).$$

Définition 1 – Covariance :

La **covariance** du couple (X, Y) est le réel, noté **Cov** (X, Y) , défini par (si existence) :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right).$$



$$\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$$

Définition 1 – Covariance :

La **covariance** du couple (X, Y) est le réel, noté **Cov** (X, Y) , défini par (si existence) :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right).$$

Théorème 6 – Condition suffisante d'existence de la covariance :

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors **Cov** (X, Y) existe.



II. Covariance d'un couple

En pratique, on utilisera assez peu la **définition (1)** , mais plutôt la formule qui suit :

Proposition 7 – Formule de Koenig-Huygens :

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$



II. Covariance d'un couple

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\blacksquare \quad \text{Cov}(X, X) = V(X).$



II. Covariance d'un couple

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$

P2 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)



II. Covariance d'un couple

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$

P2 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)

P3 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$
(linéarité à gauche)



II. Covariance d'un couple

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$

P2 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)

P3 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$
(linéarité à gauche)

P4 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$
(linéarité à droite)



II. Covariance d'un couple

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$

P2 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)

P3 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$
(linéarité à gauche)

P4 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$
(linéarité à droite)

P5 $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0.$



II. Covariance d'un couple



La réciproque de 6 est fausse mais la contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

Proposition 8 :

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

- P1** $\text{Cov}(X, X) = \mathbf{V}(X).$
- P2** $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$ (symétrie)
- P3** $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$
(linéarité à gauche)
- P4** $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$
(linéarité à droite)
- P5** $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0.$
- P6** Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0.$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Proposition 9 – Variance d'une somme :

P1

- Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \mathbf{Cov}(X, Y).$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Proposition 9 – Variance d'une somme :

- P1** ■ Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \mathbf{Cov}(X, Y).$$

- P2** ■ Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Proposition 9 – Variance d'une somme :

- P1** ■ Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2 \mathbf{Cov}(X, Y).$$

- P2** ■ Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

- P3** ■ Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k).$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Proposition 9 – Variance d'une somme :

P1 ■ Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

P2 ■ Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

P3 ■ Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k).$$

Remarque : On retiendra en particulier que :

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \left(V(X + Y) - V(X) - V(Y) \right),$$

qui permet de calculer la covariance à partir des variances.



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Exemple 7 :

Dans l'exemple du jet de deux dés à 3 faces, déterminons $V(X + Y)$ avec $X = \min(Z_1, Z_2)$ et $Y = \max(Z_1, Z_2)$ où $Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ et sont indépendantes.



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Rappel

Si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Exemple 7 :

Dans l'exemple du jet de deux dés à 3 faces, déterminons $\mathbf{V}(X + Y)$ avec $X = \min(Z_1, Z_2)$ et $Y = \max(Z_1, Z_2)$ où $Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 3 \rrbracket)$ et sont indépendantes.

Afin de s'épargner tout calcul, on remarque :

$$X + Y = \min(Z_1, Z_2) + \max(Z_1, Z_2) = Z_1 + Z_2.$$

Comme Z_1 et Z_2 sont indépendantes et admettent une variance :

$$\mathbf{V}(Z_1 + Z_2) = \mathbf{V}(Z_1) + \mathbf{V}(Z_2) = \frac{3^2 - 1}{12} + \frac{3^2 - 1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, $X + Y$ admet une variance qui vaut :

$$\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(Z_1 + Z_2) = \frac{4}{3}.$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

On peut calculer facilement la variance d'une $\mathcal{B}(n, p)$ à partir de la **proposition (9)** .
En effet, une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p :



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

On peut calculer facilement la variance d'une $\mathcal{B}(n, p)$ à partir de la **proposition (9)** .
En effet, une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p :

Corollaire 1 – Variance d'une loi binomiale :

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$V(X) = np(1 - p).$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

Théorème 10 – Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y).$$



II. Covariance d'un couple

1. Variance d'une somme

Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi :

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

Théorème 10 – Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y).$$

Remarque importante : Dans le cas d'égalité i.e. $((\text{Cov}(X, Y))^2 = \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y)$, la fonction $t \mapsto \mathbf{V}(tX + Y)$ admet alors une unique racine $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{V}(\alpha X + Y) = 0$ i.e. la variable aléatoire $\alpha X + Y$ est presque sûrement constante.

On reviendra sur ce point à la **proposition (11)** .



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

 Remarque

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X).$$

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

Définition 2 – Coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires d'écarts-types non nuls. Le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types respectifs de X et Y .



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 11 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires de variance non nulle.

P1 ▪ $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 11 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires de variance non nulle.

P1

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

P2

■ $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Proposition 11 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires de variance non nulle.

P1

▪ $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$

P2

- $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre.
- $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire



indépendantes $\Rightarrow$ non corrélées
mais la réciproque est fausse! *confer*
le contre-exemple (9) .

Proposition 11 – Interprétation du coefficient de corrélation linéaire :

Soient X et Y deux variables aléatoires de variance non nulle.

P1

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

P2

- $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre.
- $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.

Vocabulaire : Si $\rho(X, Y) = 0$ i.e. $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont non corrélés.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
Exemple : X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, Y = production de comté.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
Exemple : X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, Y = production de comté.
- Le signe de $\rho(X, Y)$ (et de $\text{Cov}(X, Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
Exemple : X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, Y = production de comté.
- Le signe de $\rho(X, Y)$ (et de $\text{Cov}(X, Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :
 - Si $\rho(X, Y) > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.
Exemple : X = température extérieure, Y = consommation de crèmes glacées.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Remarques :

- Le coefficient de corrélation linéaire permet donc de mesurer la dépendance linéaire qui peut exister entre un couple de variables aléatoires (X, Y) .
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 1 ou de -1 , la dépendance linéaire entre X et Y est importante.
Exemple : X = nombre de remises promotionnelles, Y = volume des ventes.
 - Si $\rho(X, Y)$ est proche de 0 les deux variables sont linéairement indépendantes.
Exemple : X = nombre de décès sur les routes de Franche Comté, Y = production de comté.
- Le signe de $\rho(X, Y)$ (et de $\text{Cov}(X, Y)$) indique le sens d'évolution d'une variable par rapport à l'autre :
 - Si $\rho(X, Y) > 0$, alors les deux variables évoluent en moyenne dans le même sens.
Exemple : X = température extérieure, Y = consommation de crèmes glacées.
 - Si $\rho(X, Y) < 0$, les deux variables évoluent en moyenne en sens inverse.
Exemple : X = température extérieure, Y = facture de chauffage.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

Rapidement, on a :



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

Rapidement, on a :

$$\blacksquare E(X) = \frac{14}{9} \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{22}{9}.$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$X \setminus Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

■ $E(X) = \frac{14}{9}$ et $E(Y) = \frac{22}{9}$.

■ $E(XY) = 4$.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l' exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$$\blacksquare E(X) = \frac{14}{9} \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{22}{9}.$$

$$\blacksquare E(XY) = 4.$$

$$\blacksquare \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - \frac{14}{9} \frac{22}{9} = \frac{16}{81}.$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l' exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$$\blacksquare E(X) = \frac{14}{9} \quad \text{et} \quad E(Y) = \frac{22}{9}.$$

$$\blacksquare E(XY) = 4.$$

$$\blacksquare \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - \frac{14}{9} \frac{22}{9} = \frac{16}{81}.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9 \times 26}{81} - \frac{14^2}{81} = \frac{234 - 196}{81} = \frac{38}{81} \end{aligned}$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l' exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$$\blacksquare \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - \frac{14}{9} \frac{22}{9} = \frac{16}{81}.$$

$$\begin{aligned}\blacksquare V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9 \times 26}{81} - \frac{14^2}{81} = \frac{234 - 196}{81} = \frac{38}{81}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{De même, } V(Y) = \frac{9 \times 58 - 22^2}{81} = \frac{38}{81}.$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Exemple 8 :

Reprenons une dernière fois les données de l'exemple (3) et déterminons $\rho(X, Y)$.

$$\blacksquare \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 4 - \frac{14}{9} \frac{22}{9} = \frac{16}{81}.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 1}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{26}{9} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \frac{9 \times 26}{81} - \frac{14^2}{81} = \frac{234 - 196}{81} = \frac{38}{81} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \text{De même, } V(Y) = \frac{9 \times 58 - 22^2}{81} = \frac{38}{81}.$$

Finalement,

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{16}{81}}{\sqrt{\frac{38}{81}}\sqrt{\frac{38}{81}}} = \frac{16}{81} \times \frac{81}{38} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}.$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Contre-Exemple 9 – Suite de l' exemple (5) :

On a trouvé :

- $\mathbf{E}(XY) = 0$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Contre-Exemple 9 – Suite de l' exemple (5) :

On a trouvé :

- $\mathbf{E}(XY) = 0$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

- les variables X et Y ne sont pas indépendantes.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire

Contre-Exemple 9 – Suite de l' exemple (5) :

On a trouvé :

- $\mathbf{E}(XY) = 0$ et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

- les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Les variables aléatoires X et Y sont non corrélées, mais ne sont pas indépendantes !



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire



Dans le cas où « $\Delta = 0$ », l'unique racine α de

est

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Dernière remarque : Par la formule des racines des polynômes de second degré, $at^2 + bt + c$ obtient

$$\mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = t^2 \mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})}} = -\frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})} \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma^2(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\end{aligned}$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire



Dans le cas où « $\Delta = 0$ », l'unique racine α de

second degré, $at^2 + bt + c$ obtient est

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Dernière remarque : Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine α de

$$\mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = t^2 \mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})}} = -\frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})} \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma^2(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\end{aligned}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement}$$

et

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = -1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = -\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement.}$$



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire



Rappel

Dans le cas où « $\Delta = 0$ », l'unique racine α de

second degré, $at^2 + bt + c$ obtient est

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Dernière remarque : Par la formule des racines des polynômes de second degré, on obtient que l'unique racine α de

$$\mathbf{V}(t\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = t^2 \mathbf{V}(\mathbb{X}) + 2t \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) + \mathbf{V}(\mathbb{Y})$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\cancel{\mathbf{V}(\mathbb{X})}} = -\frac{\mathbf{Cov}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})} \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\mathbf{V}(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \times \frac{\sigma(\mathbb{X})\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma^2(\mathbb{X})} \\ &= -\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})} \end{aligned}$$

On en déduit finalement, d'après ce qui précède :

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = \frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement}$$

et

$$\rho(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = -1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \mathbb{Y} = -\frac{\sigma(\mathbb{Y})}{\sigma(\mathbb{X})}\mathbb{X} + \beta \text{ presque sûrement.}$$

Les variables $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont liées par une relation affine.



II. Covariance d'un couple

2. Coefficient de corrélation linéaire



Attention encore une fois de ne pas confondre « indépendance linéaire » et « indépendance » : si $\rho(X, Y) = 0$ (ou $\text{Cov}(X, Y) = 0$), alors X et Y sont linéairement indépendantes.

Mais elles ne sont pas forcément indépendantes : il peut exister une dépendance non linéaire entre les variables, par exemple $Y = e^X$, $\ln(X)$, ...

Un peu d'histoire : **Corrélation vs Indépendance**

L'indépendance et la corrélation ou plus exactement la dépendance et la corrélation sont deux notions en statistique qui sont souvent confondues. Formellement, l'indépendance entre deux variables X et Y indique que la connaissance de la réalisation de l'une des variables n'a aucune incidence sur la probabilité de réalisation de l'autre variable. La corrélation quant à elle renvoie à l'existence d'une liaison linéaire entre les deux variables.

Donc l'indépendance est une notion liée à la « chance » de réalisation des événements des variables X et Y tandis que la corrélation est une notion liée à la fonction linéaire qui existerait entre les valeurs des deux variables.

Il est théoriquement démontré que si deux variables sont indépendantes alors elles ne sont pas corrélées. Autrement dit, si les probabilités de réalisation des événements liés aux variables X et Y vérifient la condition d'indépendance alors les valeurs de ces variables n'ont pas de liaison linéaire entre elles. Par conséquent, si deux variables sont corrélées alors elles sont nécessairement dépendantes (c'est-à-dire elles ne sont pas indépendantes).

Ce résultat laisse alors la possibilité aux situations où des variables seraient dépendantes sans être corrélées.



III. Bilan et compétences attendues

1 Calculs d'espérances

2 Covariance d'un couple

3 **Bilan et compétences attendues**



III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité!), d'un produit (théorème de transfert).



III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur $\mathbf{Cov}$.



III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur $\mathbf{Cov}$.
- savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).



III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\text{Cov}(X, Y)$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur **Cov**.
- savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).
- savoir calculer un coefficient de corrélation linéaire et savoir commenter sa valeur (proximité de 1, -1 et signe).



III. Bilan et compétences attendues

Les compétences attendues sur le chapitre couple de variables aléatoires réelles sont les suivantes :

- savoir déterminer l'espérance d'une somme (linéarité !), d'un produit (théorème de transfert).
- connaître la définition de la covariance et savoir calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$. Il faut connaître les propriétés (linéarité à droite et à gauche) de l'opérateur $\mathbf{Cov}$.
- savoir déterminer la variance d'une somme (formule dans le cas général et formule dans le cas de l'indépendance).
- savoir calculer un coefficient de corrélation linéaire et savoir commenter sa valeur (proximité de 1, -1 et signe).
- savoir démontrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes via le calcul de l'espérance du produit / de la covariance / du coefficient de corrélation linéaire (3 formulations différentes de la même propriété).

